

平成 17 (2005) 年度

慶應義塾大学入学試験問題

医 学 部

数 学

注意事項

1. 受験番号と氏名を解答用紙の所定の欄にそれぞれ必ず記入してください。
2. 解答は、必ず解答用紙の所定の欄に記入してください。
3. この問題冊子の余白を計算および下書きに用いてください。
4. この問題冊子の総ページ数は 8 ページです。試験開始の合図とともに全てのページが揃っているかどうか確認してください。ページが抜けていたり重複していたら直ちに監督者に申し出てください。
5. この問題冊子を試験終了後必ず持ち帰ってください。

[I]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

(1) xy 平面上の 2 つの円

$$O_1 : x^2 + y^2 = 1$$

$$O_2 : (x-5)^2 + y^2 = 4$$

を考える。点 $P(2, a)$ を通る O_1, O_2 の共通接線を引くことができるような a の値のうち、正の有理数は $a = \boxed{\text{(あ)}}$ であり、正の無理数は $a = \boxed{\text{(い)}}$ である。
 $a = \boxed{\text{(あ)}}$ のとき、その共通接線と O_2 の接点の座標は $(\boxed{\text{(う)}}, \boxed{\text{(え)})}$ である。

(2) $f(x) = \left(\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}\right) \sin x$ とすると、 $f(x)$ の不定積分は

$$\int f(x) dx = \boxed{\text{(お)}} + C \quad \text{ただし、} C \text{ は積分定数}$$

となる。さらに、

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |f(x)| dx = \boxed{\text{(か)}}$$

となる。

[Ⅱ]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

箱が3つと球が3個用意されている。ある箱の中に球が1個入っている場合その箱を「1球入りの箱」と呼び、球が2個入っている場合は「2球入りの箱」、球が3個入っている場合は「3球入りの箱」と呼ぶことにする。いま各箱の中に球を1個ずつ入れ、次の操作Tを何回か繰返す。

操作 T 次の (a)～(c) の規則に従って3個の球を同時に処理する。

- (a) 「1球入りの箱」の中の球については、他の球とは独立に、確率 $\frac{2}{3}$ でいま入っている箱の中に入れたままにし、確率 $\frac{1}{6}$ ずつで他の2つの箱のうちのどちらかに移す。
- (b) 「2球入りの箱」の中の球については、各球を互いに独立に、確率 $\frac{1}{3}$ でいま入っている箱の中に入れたままにし、確率 $\frac{1}{3}$ ずつで他の2つの箱のうちのどちらかに移す。
- (c) 「3球入りの箱」の中の球については、各球を互いに独立に、確率 $\frac{2}{3}$ でいま入っている箱の中に入れたままにし、確率 $\frac{1}{6}$ ずつで他の2つの箱のうちのどちらかに移す。

以下、 n を自然数とする。 n 回目の操作を終えたとき、各箱の中に球が1個ずつ入っている確率を p_n 、どれか1つの箱の中に球が3個入っている確率を q_n とする。

(1) $p_1 =$ (あ), $q_1 =$ (い) であり, $p_2 =$ (う) である。

(2) $n \geq 2$ のとき, p_n, q_n を p_{n-1}, q_{n-1} を用いて表すと

$$\begin{cases} p_n = \text{(え)} p_{n-1} + \text{(お)} q_{n-1} + \frac{2}{9} \\ q_n = \text{(か)} p_{n-1} + \text{(き)} q_{n-1} + \text{(く)} \end{cases}$$

となる。よって $p_n + q_n$ を n の式で表すと $p_n + q_n =$ (け) となり, p_n を n の式で表すと $p_n =$ (こ) となる。

[Ⅲ]

設問 (1) から (3) に答えなさい。

平面上の四角形 PQRS において、三角形 PQS および三角形 QRS がともに正三角形であるとき、四角形 PQRS は「線分 PR を長対角線とする正ひし形」であるということにする。

- (1) 平面上に 2 点 P, R が与えられたとき、定規とコンパスによって「線分 PR を長対角線とする正ひし形」を作図する手順を箇条書きで示しなさい。(補助的に手書き図を用いてもよい。)

いま座標平面上の 3 点 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $C(x, y)$ に対し、座標平面上の点 D, E, F を次の (i), (ii), (iii) により定める。ただし、 $y > 0$ とする。

- (i) 点 D は線分 BC を長対角線とする正ひし形の頂点で、直線 BC に関し点 A の反対側にある。
- (ii) 点 E は線分 CA を長対角線とする正ひし形の頂点で、直線 CA に関し点 B の反対側にある。
- (iii) 点 F は線分 AB を長対角線とする正ひし形の頂点で、直線 AB に関し点 C の反対側にある。
- (2) 三角形 DEF が正三角形であることを示しなさい。
- (3) 三角形 DEF の重心が三角形 ABC の重心と一致することを示しなさい。

— 下書き計算用 —

[IV]

設問(1)から(3)に答えなさい。

関数 $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ が等式

$$f(x) = 1 + \int_0^x tf(t)dt$$

を満たすことに着目して、自然対数の底 e の平方根 $\sqrt{e}$ の近似値を求めることを考える。

そこで、 $f(x)$ を近似する関数 $f_n(x)$ ($n = 0, 1, \dots$) を

$$f_0(x) = 1$$

$$f_n(x) = 1 + \int_0^x tf_{n-1}(t)dt \quad (n = 1, 2, \dots)$$

により順に定める。

(1) $0 \leq x \leq 1$ のとき

$$f(x) - f_0(x) \leq \sqrt{e} - 1$$

を示しなさい。

(2) $0 \leq x \leq 1$ のとき、任意の n ($n = 1, 2, \dots$) に対し

$$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{2^n n!} (\sqrt{e} - 1) x^{2n}$$

を示しなさい。

(3) $f_5(1)$ と $\sqrt{e}$ が小数第3位まで一致することを示しなさい。

— 下書き計算用 —

