

〔I〕

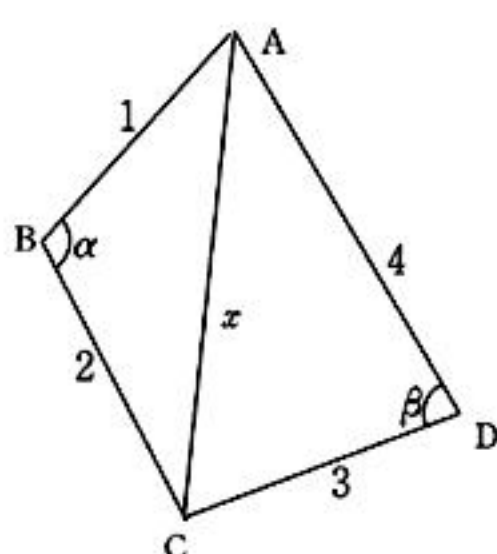
$$(1) 5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 7y^2 = 16 \quad \dots \textcircled{1}$$

上の点 (x, y) を原点を中心に 30° 回転した点を (x', y') とすると、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-30^\circ) & -\sin(-30^\circ) \\ \sin(-30^\circ) & \cos(-30^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3}x' + y' \\ -x' + \sqrt{3}y' \end{pmatrix}$$

$x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x' + y')$, $y = \frac{1}{2}(-x' + \sqrt{3}y')$ を①に代入して整理すると、

$$4x'^2 + 8y'^2 = 16 \quad \therefore \frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{2} = 1 \quad \dots \textcircled{2} \text{ (a) (b)}$$



(2) $\angle ABC = \alpha$, $\angle ADC = \beta$ とおく。

三角形成立条件より $1 < x < 3$ かつ $1 < x < 7$

$$\therefore 1 < x < 3$$

$$\therefore 1 < t < 9$$

余弦定理より

$$\cos \alpha = \frac{5 - x^2}{4} = \frac{5 - t}{4} \quad \therefore \sin \alpha = \frac{1}{4} \sqrt{4^2 - (5 - t)^2}$$

$$\cos \beta = \frac{25 - x^2}{24} = \frac{25 - t}{24} \quad \therefore \sin \beta = \frac{1}{24} \sqrt{24^2 - (25 - t)^2}$$

$$S = \frac{1}{4} \left\{ \sqrt{4^2 - (5 - t)^2} + \sqrt{24^2 - (25 - t)^2} \right\} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\left(= \frac{1}{4} \left\{ \sqrt{-9 + 10t - t^2} + \sqrt{-49 + 50t - t^2} \right\} \right)$$

$$S' = \frac{1}{4} \left[\frac{5 - t}{\sqrt{4^2 - (5 - t)^2}} + \frac{25 - t}{\sqrt{24^2 - (25 - t)^2}} \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{25 - t}{\sqrt{24^2 - (25 - t)^2}} - \frac{t - 5}{\sqrt{4^2 - (5 - t)^2}} \right]$$

$1 < t < 5$ のとき $S' > 0$ であるから、

$5 \leq t < 9$ で考えてよい。 $S' = 0$ なる t は

$$(25 - t)\sqrt{4^2 - (5 - t)^2} = (t - 5)\sqrt{24^2 - (25 - t)^2}$$

辺々を2乗して

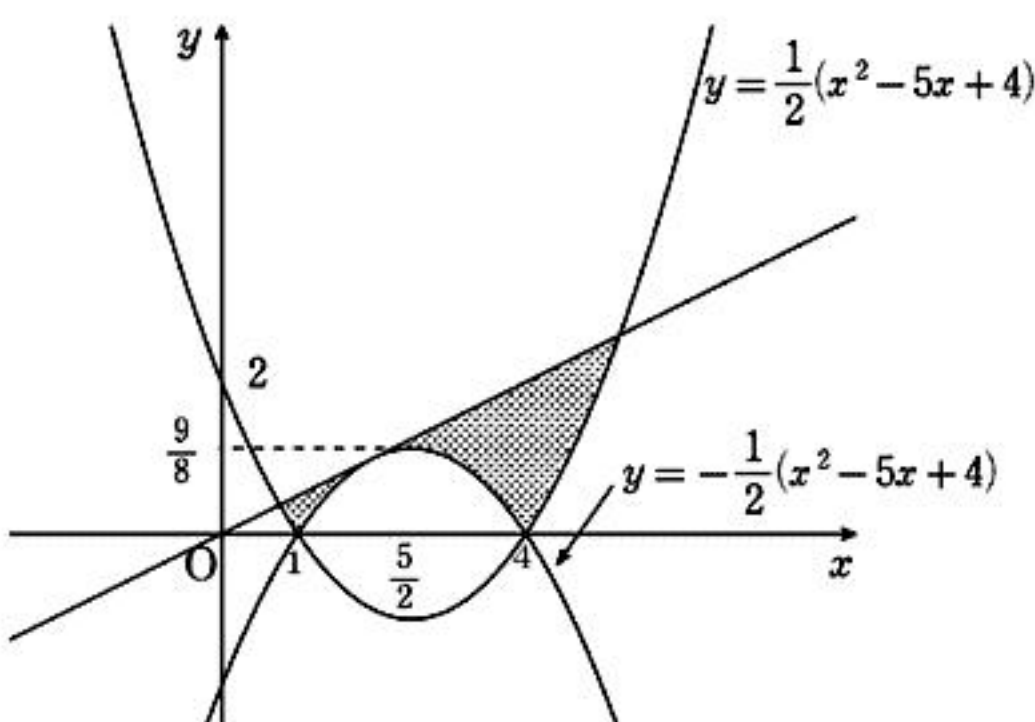
$$(25 - t)^2 \cdot \{4^2 - (5 - t)^2\} = (t - 5)^2 \cdot \{24^2 - (25 - t)^2\}$$

$$\iff (24t - 120)^2 - (4t - 100)^2 = 0$$

$$\iff (28t - 220)(20t - 20) = 0$$

$5 \leq t < 9$ をみたす t は $t = \frac{55}{7}$ で、このとき S は最大になる。

$$\therefore t = \frac{55}{7} \quad \dots \textcircled{4} \text{ (c)}$$



$$(3) C: y = \frac{1}{2}|x^2 - 5x + 4| = \frac{1}{2}|(x - 1)(x - 4)|$$

$l: y = kx$ ($k > 0$) が C と3個の共有点をもつのは、

l が $y = -\frac{1}{2}(x^2 - 5x + 4)$ に接するときで、

$$kx = -\frac{1}{2}(x^2 - 5x + 4)$$

$$\iff x^2 + (2k - 5)x + 4 = 0$$

上式の判別式を D とすると、

$$D = (2k - 5)^2 - 16 = 0 \iff 4k^2 - 20k + 9 = 0$$

$$\iff (2k - 9)(2k - 1) = 0$$

グラフよりみたす k は $k = \frac{1}{2}$ $\dots \textcircled{5} \text{ (d)}$

このとき、 C と l で囲まれる部分の面積 S は

上図の打点部分の面積に等しい。

$y = \frac{1}{2}(x^2 - 5x + 4)$ と $y = \frac{1}{2}x$ との交点の x 座標は、

$$x^2 - 5x + 4 = x \iff x^2 - 6x + 4 = 0 \text{ から}$$

$$x = 3 \pm \sqrt{5}$$

求める面積を S とすると、($\alpha = 3 - \sqrt{5}$, $\beta = 3 + \sqrt{5}$ とおく)

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}(x^2 - 5x + 4) \right\} dx - 2 \times \int_1^4 \left\{ -\frac{1}{2}(x^2 - 5x + 4) \right\} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx + \int_1^4 (x - 1)(x - 4) dx$$

$$= \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^3 - \frac{1}{6}(3)^3 = \frac{1}{12}(2\sqrt{5})^3 - \frac{9}{2} = \frac{10\sqrt{5}}{3} - \frac{9}{2} \quad \dots \textcircled{6} \text{ (e)}$$

[II]

(1) $a_2 = 1$ なる確率は $\frac{1}{3}$... (あ)

i 回目のとき, $a_i = 1$ となる確率を p_i とすると,

$$p_{i+1} = \frac{1}{3}(1 - p_i) \iff p_{i+1} = -\frac{1}{3}p_i + \frac{1}{3}$$

これを変形して,

$$p_{i+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left(p_i - \frac{1}{4}\right)$$

これより,

$$p_{i+1} - \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{3}\right)^i \cdot \left(p_1 - \frac{1}{4}\right) \quad \therefore p_i = \frac{1}{4} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{i-1} \right\} \quad \dots (い)$$

(2) $A_n = \{1, 2\}$ となるのは,

n 回とも箱 1, 2 で球を移動させればよいから

$$\frac{1}{3^n} \quad \dots (う) \quad (n \geq 2)$$

$A_n = \{3, 4\}$ となるのは,

1 回目が 3 のとき $\left(\frac{1}{3}\right)^n$, 1 回目が 4 のとき $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ であるから

$$\frac{2}{3^n} \quad \dots (え) \quad (n \geq 2)$$

(3) $A_n \subset \{1, 2, 3\}$ となるのは,

1 回目が 2 のとき, $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, 1 回目が 3 のとき, $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$$\therefore \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \dots (お) \quad (n \geq 1)$$

$A_n \subset \{2, 3, 4\}$ となるのは, 1 回目はどれでもよく,

2 回目以降が, $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$$\therefore \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \dots (か) \quad (n \geq 1)$$

(4) $A_n = \{1, 2, 3\}$ となるのは, (お) の結果から

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ の確率

$$\frac{2}{3^n} + \frac{2}{3^n} = \frac{4}{3^n} \text{ を引いたものに等しく,}$$

$$\therefore \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{4}{3^n} \quad \dots (き) \quad (n \geq 3)$$

$A_n = \{2, 3, 4\}$ となるのは, (か) の結果から

$\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$ の確率

$$3 \times \frac{2}{3^n} = \frac{6}{3^n} \text{ を引いたものに等しく,}$$

$$\therefore \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{2}{3^{n-1}} \quad \dots (く) \quad \left[\text{または } \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{6}{3^n} \right]$$

(5) $\{1, 2, 3\} \subset A_n$ となるのは,

$A_n = \{1, 2, 3\}$, $A_n = \{1, 2, 3, 4\}$ の和集合である。

この確率は次の確率を 1 から引いたものに等しい。

$$\cdot \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\} \quad \dots \quad \frac{3}{3^n}$$

$$\cdot \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\} \quad \dots \quad \frac{6}{3^n}$$

$$\cdot \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\} \quad \dots \quad 2 \times \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{4}{3^n} \right]$$

$$\cdot \{2, 3, 4\} \quad \dots \quad \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{6}{3^n}$$

これらをすべて足すと,

$$\frac{3}{3^n} + \frac{6}{3^n} + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{8}{3^n} + \frac{3}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{6}{3^n}$$

$$= -\frac{5}{3^n} + \frac{7}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

求める確率はこの余事象の確率に等しく,

$$1 - \left[-\frac{5}{3^n} + \frac{7}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] = 1 + \frac{5}{3^n} - \frac{7}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \dots (け)$$

(6) $A_n \cup \{1, 2\} = U$ となるのは

$A_n = \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$ のときで,

求める確率は $\{1, 2, 3, 4\}$ の確率が

$$1 + \frac{5}{3^n} - \frac{7}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{4}{3^n}$$

$$= 1 + \frac{9}{3^n} - \frac{9}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

であるから,

$$\frac{2}{3^n} + \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{4}{3^n} \right] + \left[\frac{3}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{6}{3^n} \right] + \left[1 + \frac{9}{3^n} - \frac{9}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]$$

$$= 1 + \frac{1}{3^n} - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \dots (こ)$$

〔Ⅲ〕

$$f(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} - a \cos x \right| dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \left(\frac{2 \sin x}{1 + \sin^2 x} - a \right) \cdot \cos x \right| dx$$

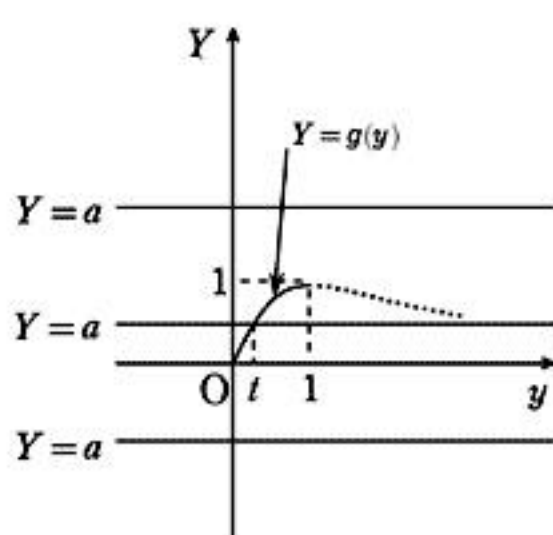
$\sin x = y$ とおくと, $\cos x dx = dy$

x	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$
y	$0 \rightarrow 1$

(1) $f(a) = \int_0^1 \left| \frac{2y}{1+y^2} - a \right| dy$ $c=1$... (あ), $g(y) = \frac{2y}{1+y^2}$... (い)

$0 \leq y \leq 1$ で

$$0 \leq g(y) = \frac{2y}{1+y^2} \leq 1$$



(2)

(i) $a \leq 0$ のとき,

$$f(a) = \int_0^1 \left\{ \frac{2y}{1+y^2} - a \right\} dy = [\log(1+y^2) - ay]_0^1 = \log 2 - a \quad \dots (う)$$

(ii) $a \geq 1$ のとき,

$$f(a) = -\int_0^1 \left\{ \frac{2y}{1+y^2} - a \right\} dy = a - \log 2 \quad \dots (え)$$

(iii) $0 < a < 1$ のとき,

$a = g(y)$ となる y を t とすると,

$$a = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$f(a) = -\int_0^t \left\{ \frac{2y}{1+y^2} - a \right\} dy + \int_t^1 \left\{ \frac{2y}{1+y^2} - a \right\} dy$$

$$= -[\log(1+y^2) - ay]_0^t + [\log(1+y^2) - ay]_t^1$$

$$= -2\{\log(1+t^2) - at\} + \log 2 - a$$

$$= -2\log(t^2 + 1) + (2t - 1) \cdot a + \log 2$$

$$= -2\log(t^2 + 1) + \frac{2(2t^2 - t)}{t^2 + 1} + \log 2$$

$$a = \frac{2t}{1+t^2} \text{ より}$$

$$at^2 - 2t + a = 0, \quad t = \frac{1 - \sqrt{1-a^2}}{a}, \quad t^2 = \frac{2-a^2-2\sqrt{1-a^2}}{a^2}$$

であるから,

$$f(a) = -2\log 2 \cdot (1 - \sqrt{1-a^2}) + 4\log a$$

$$+ 2(1 - \sqrt{1-a^2}) + \log 2 - a \quad \dots (お)$$

(3) $a \leq 0$ のとき, $f(a)$ は減少し, $a \geq 1$ のとき, $f(a)$ は増加する。

$0 < a < 1$ のとき, $0 < t < 1$ で

$$f(a) = -2\log(t^2 + 1) + \frac{2(2t^2 - t)}{t^2 + 1} + \log 2$$

の辺々を t で微分すると,

$$f'(a) = -\frac{4t}{t^2 + 1} + 2 \cdot \frac{(4t-1)(t^2+1) - (2t^2-t) \cdot 2t}{(t^2+1)^2}$$

$$= \frac{2(1-t)(2t-1)(t+1)}{(t^2+1)^2}$$

$f'(a) = 0$ なる t は $t = \frac{1}{2}$ で, このとき, $f(a)$ は最小となる。

$$\therefore a = \frac{4}{5} \quad \dots (か)$$

最小値 $\log \frac{32}{25} \quad \dots (き)$

