

[1]

- (1) $O_1: x^2 + y^2 = 1$ より, 中心(0, 0), 半径 1 の円

$$O_2: x^2 + 2x + y^2 - 4y - \alpha = 0$$

$$\iff (x+1)^2 + (y-2)^2 = \alpha + 5$$

$\alpha > -5$ より, 中心(-1, 2), 半径 $\sqrt{\alpha+5}$ の円

O_1, O_2 が 2 点で交わるのは, 図より

$$\sqrt{5} - 1 < \sqrt{\alpha+5} < \sqrt{5} + 1$$

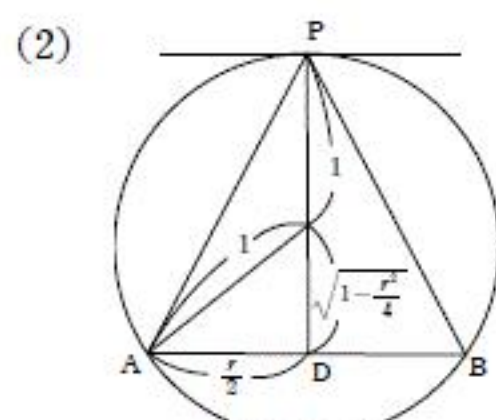
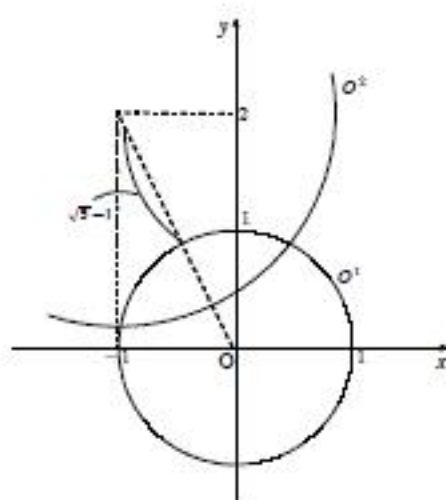
$$\iff 1 - 2\sqrt{5} < \alpha < 1 + 2\sqrt{5}$$

$\alpha > -5$ との共通範囲を求めて,

$$1 - 2\sqrt{5} < \alpha < 1 + 2\sqrt{5} \quad \dots\dots(\text{あ})$$

このとき, O_1, O_2 の交点を通る直線の方程式は, 2 式を連立して

$$2x - 4y + 1 - \alpha = 0 \quad \therefore y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{4} \quad \dots\dots(\text{い})$$



点 A, B を固定したとき,

$\triangle ABP$ の面積が最大になるのは,
P が AB の垂直二等分線上にあるときで,
AB の中点を D とすると,

$$PD = 1 + \sqrt{1 - \frac{r^2}{4}}$$

で, そのときの面積 $S(r)$ は,

$$S(r) = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{r^2}{4}}\right) = \frac{1}{4} \cdot r \cdot (2 + \sqrt{4 - r^2}) \quad \dots\dots(\text{う})$$

次に r を変化させる.

r で微分して,

$$S'(r) = \frac{1}{4} \left\{ 2 + \sqrt{4 - r^2} - \frac{r^2}{\sqrt{4 - r^2}} \right\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{4 - r^2} - (r^2 - 2)}{\sqrt{4 - r^2}}$$

$\sqrt{4 - r^2} = r^2 - 2$ となる r は $\sqrt{2} \leq r \leq 2$ のとき, 辺々を 2 乗して

$$4 - r^2 = r^4 - 4r^2 + 4 \iff 0 = r^4 - 3r^2 = r^2(r + \sqrt{3})(r - \sqrt{3}) \text{ より}$$

$$r = \sqrt{3} \quad \dots\dots(\text{え})$$

$$\text{のとき最大で, 最大値 } S(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad \dots\dots(\text{お})$$

r	$\sqrt{2}$		$\sqrt{3}$		2
$S'(r)$		+	0	-	
$S(r)$		$\nearrow$		$\searrow$	

(2) 別解

$$S(r) = \frac{1}{4} r \cdot (2 + \sqrt{4 - r^2})$$

で, $r = 2\sin\theta$ とおくと, $0 < r \leq 2$ より $0 < \theta < \pi$ で

$S(r) = \sin\theta + \sin\theta \cdot \cos\theta$ となり, θ で微分して,

$$S'(r) = (2\cos\theta + 1)(1 - \cos\theta), \quad \theta = \frac{2}{3}\pi, \quad r = \sqrt{3} \text{ のとき}$$

最大となることで求めてもよい.

(3)

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)} &= \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1} \\ &= \frac{(a+b)x^2 + (b+c)x + a+c}{(x+1)(x^2+1)} \end{aligned}$$

分子の各項の係数を比較して,

$$a+b=0, \quad b+c=1, \quad a+c=-1$$

$a+b+c=0$ より,

$$a = \underline{-1}, \quad b = \underline{1}, \quad c = \underline{0} \quad \dots\dots(\text{か}) \sim (\text{く})$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \int \frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)} dx &= \int \frac{-1}{x+1} dx + \int \frac{x}{x^2+1} dx \\ &= -\log|x+1| + \frac{1}{2} \log(x^2+1) + C \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{x^2+1}{(x+1)^2} + C \end{aligned}$$

(C: 積分定数)

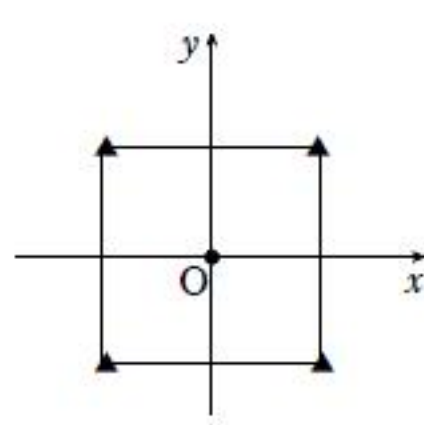
となるから,

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{|x-1|}{(x+1)(x^2+1)} dx &= -\int_0^1 \frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)} dx + \int_1^T \frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)} dx \\ &= -\left[\frac{1}{2} \log \frac{x^2+1}{(x+1)^2} \right]_0^1 + \left[\frac{1}{2} \log \frac{x^2+1}{(x+1)^2} \right]_1^T \\ &= -\log \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log \frac{T^2+1}{(T+1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{|x-1|}{(x+1)(x^2+1)} dx &= \log 2 + \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \log \frac{1 + \frac{1}{T^2}}{\left(1 + \frac{1}{T}\right)^2} \\ &= \log 2 \quad \dots\dots(\text{け}) \end{aligned}$$

II]

- (1) 領域 A の格子点で、 $A_n \subset A \cap U$ を満たす $(a_i, b_i) (i=1, 2, \dots, n)$ の格子点は $\{(0, 0), (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$ である。



点 $(0, 0)$ から始めて、操作 T を繰り返すことより、
 i : 奇数のとき、原点以外の点(▲)に一致し、
 i : 偶数のとき、原点(●)に一致する。

p_{2m-1} と p_{2m} の関係式は

$$p_{2m} = \frac{1}{4} p_{2m-1} \cdots \cdots \textcircled{1} \quad \left(\begin{array}{l} \text{▲の各点から原点のみ} \\ \text{に移動できる, 確率 } \frac{1}{4} \text{ で移動} \end{array} \right)$$

p_{2m} と p_{2m+1} の関係式は

$$p_{2m+1} = p_{2m} \cdots \cdots \textcircled{2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{原点から▲のどの点へも} \\ \text{に移動できる, 確率 } 1 \text{ で移動} \end{array} \right)$$

$$p_1 = 1, p_2 = 4 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } p_{2m+1} = \frac{1}{4} p_{2m-1}$$

$$\iff p_{2(m+1)-1} = \frac{1}{4} p_{2m-1}$$

$$\therefore p_{2m-1} = \left(\frac{1}{4} \right)^{m-1} \cdot p_1 = \left(\frac{1}{4} \right)^{m-1} \cdots \cdots (\text{あ})$$

$$\textcircled{1} \text{ より } p_{2m} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^{m-1} = \left(\frac{1}{4} \right)^m \cdots \cdots (\text{い})$$

- (2) $B: x-2 \leq y \leq x$

原点から始めて、操作 T を繰り返すことより、

$A_n \subset B \cap U$ となるためには、

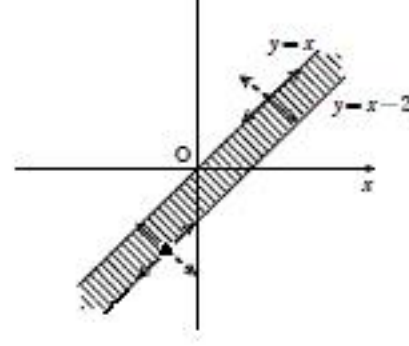
格子点 $(a_i, b_i) (i=1, 2, \dots, n)$ はすべて

$y=x$ または $y=x-2$ 上にある。

$q_1 = \frac{3}{4}$ であり

$$q_{n+1} = \frac{3}{4} q_n \quad \left(\begin{array}{l} y=x \text{ 上の点(●)} \\ y=x-2 \text{ 上の点(▲)} \\ \text{から, 条件をみたすためには} \\ 3 \text{ 方向に移動できる, 確率 } \frac{3}{4} \end{array} \right)$$

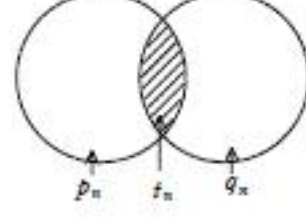
$$\therefore q_n = \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1} \cdot q_1 = \left(\frac{3}{4} \right)^n \cdots \cdots (\text{う})$$



- (3) $A_n \subset A \cap U$ かつ $A_n \subset B \cap U$ をみたす確率を t_n とする。 $\cdots \cdots (*)$

(1), (2) より

$$\begin{cases} p_{2m-1} = \left(\frac{1}{4} \right)^{m-1} \\ p_{2m} = \left(\frac{1}{4} \right)^m \end{cases}, \begin{cases} q_{2m-1} = \left(\frac{3}{4} \right)^{2m-1} \\ q_{2m} = \left(\frac{3}{4} \right)^{2m} \end{cases}$$

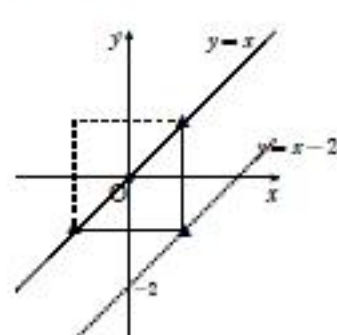


(*) をみたす、 $(a_i, b_i) (i=1, 2, \dots, n)$

は $(1, 1), (1, -1), (-1, -1)$ のみで、

(1) と同様な考え方

$$\begin{cases} t_{2m} = \frac{1}{4} t_{2m-1} \cdots \textcircled{3} & \left(\begin{array}{l} \text{▲から原点に} \\ \frac{1}{4} \text{ で移動} \end{array} \right) \\ t_{2m+1} = \frac{3}{4} t_{2m} \cdots \textcircled{4} & \left(\begin{array}{l} \text{原点から▲に} \\ \frac{3}{4} \text{ で移動} \end{array} \right) \end{cases} \quad \left(t_1 = \frac{3}{4} \right)$$



両式より、 $\left[\textcircled{3} \text{ の辺々を } \frac{3}{4} \text{ 倍して} \right]$

$$t_{2m+1} = \frac{3}{16} t_{2m-1} \iff t_{2(m+1)-1} = \frac{3}{16} t_{2m-1}$$

$$\therefore \begin{cases} t_{2m-1} = \left(\frac{3}{16} \right)^{m-1} \cdot t_1 = \frac{3}{4} \left(\frac{3}{16} \right)^{m-1} \\ t_{2m} = \left(\frac{3}{16} \right)^m \end{cases}$$

以上より

$$r_{2m-1} = p_{2m-1} + q_{2m-1} - t_{2m-1} = \left(\frac{1}{4} \right)^{m-1} + \left(\frac{3}{4} \right)^{2m-1} - \frac{3}{4} \left(\frac{3}{16} \right)^{m-1} \cdots \cdots (\text{え})$$

$$r_{2m} = p_{2m} + q_{2m} - t_{2m} = \left(\frac{1}{4} \right)^m + \left(\frac{3}{4} \right)^{2m} - \left(\frac{3}{16} \right)^m \cdots \cdots (\text{お})$$

- (4) $s_1 = s_2 = 0$

A_1 は要素の個数が 1 個、 A_2 は要素の個数が 2 個である。

A_3 の要素の個数が 3 個になるのは、2 回目の操作での点 (a_2, b_2)

から、 (a_1, b_1) の点以外の点を選べばよいから、

$$s_3 = \frac{3}{4} \cdots \cdots (\text{か})$$

s_4 は A_3 の要素の個数が 3 個のとき、点 (a_3, b_3) から点 (a_2, b_2) に

戻った点を (a_4, b_4) とすれば要素の個数は 3 個。この確率が

$$\frac{1}{4} \times s_3 = \frac{3}{16}$$

$1 - s_3$ は A_3 の要素の個数が 2 個のときの確率で点 (a_3, b_3) から

点 (a_2, b_2) 以外の点を選んで (a_4, b_4) とすれば要素の個数は 3 個。

この確率が

$$\frac{3}{4} \times (1 - s_3) = \frac{3}{16}$$

$$\therefore s_4 = \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{3}{8} \cdots \cdots (\text{き})$$

- (5) A_{2m} の要素が 3 個になるのは、 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{2m}$ の要素の個数が

次のように変化していくときである。

$$\xrightarrow{2\text{回}} 1 \rightarrow 2 \xrightarrow{2(k-1)\text{回}} 1 \rightarrow 2 \cdots \cdots \xrightarrow{1\text{回}} 2 \xrightarrow{2(m-k-1)\text{回}} 3 \rightarrow 3 \cdots \cdots \xrightarrow{1\text{回}} 3 \text{個} \rightarrow 3 \text{個}$$

または

$$\xrightarrow{2\text{回}} 1 \rightarrow 2 \xrightarrow{(2k-3)\text{回}} 2 \cdots \cdots \xrightarrow{1\text{回}} 2 \xrightarrow{2(m-k)\text{回}} 3 \rightarrow 3 \cdots \cdots \rightarrow 3 \text{個} \quad (k=2, 3, \dots, m)$$

この確率はそれぞれ

$$1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^{2(k-1)} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \right)^{m-k-1} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} \right)^{m-1} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1}$$

$$1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^{2k-3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \right)^{m-k} = 3 \cdot \left(\frac{1}{8} \right)^{m-1} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore s_{2m} &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{8} \right)^{m-1} \cdot \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} + 3 \cdot \left(\frac{1}{8} \right)^{m-1} \cdot \sum_{k=2}^{m-1} \left(\frac{1}{2} \right)^{m-1} \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{8} \right)^{m-1} \cdot 2 \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{m-1} \right\} + 3 \left(\frac{1}{8} \right)^{m-1} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{m-1} \right\} \\ &= 6 \cdot \left(\frac{1}{8} \right)^{m-1} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{m-1} \right\} \cdots \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

- (5) 別解 (漸化式から求める)

$m \geq 2$ のとき、 s_{2m} 、 $s_{2(m-1)}$ の関係式を求める。

・ $s_{2(m-1)}$ は $2(m-1)$ 回の試行のとき要素の個数が 3 個になっている

$$\text{確率で, 残り 2 回は } \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \left(2m-1 \text{ 回目 } \blacktriangle \text{ にいる場合, } \blacktriangle \xrightarrow{\frac{1}{4}} \bullet \xrightarrow{\frac{1}{2}} \blacktriangle \right)$$

$$\begin{array}{c} \blacktriangle \swarrow \bullet \swarrow \blacktriangle \quad \blacktriangle \swarrow \bullet \swarrow \blacktriangle \quad \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \left(2m-1 \text{ 回目 } \bullet \text{ にいる場合, } \bullet \xrightarrow{\frac{1}{2}} \blacktriangle \xrightarrow{\frac{1}{4}} \bullet \right) \end{array}$$

で $\frac{1}{8}$ であるから $\frac{1}{8} s_{2(m-1)}$

・ $2(m-1)$ 回のとき、要素の個数が 2 個である確率は、

$$1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^{2m-4} = \left(\frac{1}{4} \right)^{2m-4}$$

1回目 2回目

$$\text{その後 2 回で, } \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

$$\therefore \left(\frac{3}{8} \right) \times \left(\frac{1}{4} \right)^{2m-4} = 6 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^{2m-2}$$

以上より

$$s_{2m} = \frac{1}{8} s_{2(m-1)} + 6 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^{2m-2} \quad (m \geq 2)$$

上式の辺々に 4^{2m} をかけて、

$$4^{2m} s_{2m} = 2 \cdot 4^{2(m-1)} s_{2(m-1)} + 6 \cdot 4^2 \quad (a_{2m} = 4^{2m} s_{2m} \text{ とおく})$$

$$\iff a_{2m} = 2 a_{2(m-1)} + 6 \cdot 4^2$$

$$\iff a_{2m} + 6 \cdot 4^2 = 2(a_{2(m-1)} + 6 \cdot 4^2)$$

から

$$a_{2m} = 2^{m-1} (a_2 + 6 \cdot 4^2)$$

$$= 6 \cdot 4^2 \cdot 2^{m-1} - 6 \cdot 4^2$$

$$4^{2m} s_{2m} = 6 \cdot 4^2 \cdot 2^{m-1} - 6 \cdot 4^2$$

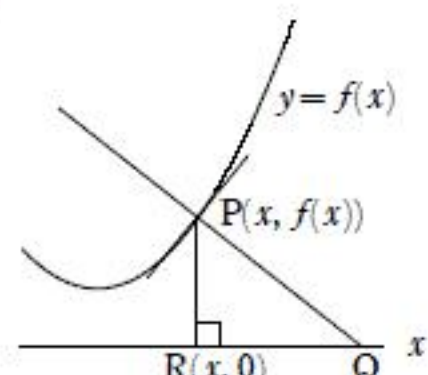
$$\therefore s_{2m} = \frac{6}{16^m} (16 \cdot 2^{m-1} - 16)$$

$$= 6 \cdot \left\{ \left(\frac{1}{8} \right)^{m-1} - \left(\frac{1}{16} \right)^{m-1} \right\}$$

$$= 6 \cdot \left(\frac{1}{8} \right)^{m-1} \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{m-1} \right\} \cdots \cdots (\text{答})$$

[Ⅲ] $k = f(0)$, $f(x) > 0$

(1)



$P(x, f(x))$ における接線の傾きは,

$$f'(x)$$

$P(x, f(x))$ における法線の傾きは,

$$f'(x) \neq 0 \text{ のとき, } -\frac{1}{f'(x)}$$

法線の方程式は

$$Y = -\frac{1}{f'(x)}(X-x) + f(x) \\ = -\frac{1}{f'(x)}X + \frac{x}{f'(x)} + f(x) \quad (f'(x) \neq 0)$$

.....①

($f'(x) = 0$ のとき, 法線は $Y = x$)

①と X 軸との交点が Q であるから, $Y = 0$ を代入して

$$X = x + f(x) \cdot f'(x) \quad (f'(x) \neq 0)$$

$$f'(x) = 0 \text{ のとき, } X = x$$

$$\therefore a(x) = x + f(x) \cdot f'(x) \quad \text{.....(あ)}$$

(2) 定義域でつねに $f'(x) > 0$ であるから

$$RQ = f(x) \cdot f'(x)$$

$$\triangle PQR \text{ の面積は, } m = \frac{1}{2} \cdot f(x) \cdot f(x) f'(x)$$

$$\iff \{f(x)\}^2 \cdot f'(x) = 2m$$

$y = f(x)$ とおくと, $x = 0$ のとき $y = k$ で

$$y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 2m$$

辺々を x で積分して

$$\int y^2 dy = 2m \int dx$$

$$\frac{1}{3} y^3 = 2mx + C, \quad x = 0,$$

$$y = k \text{ を代入して, } C = \frac{1}{3} k^3$$

$$\text{よって, } y^3 = 6mx + k^3 \quad \therefore f(x) = (6mx + k^3)^{\frac{1}{3}} \quad \text{.....(い)}$$

(3)

$$a(x) = \alpha x + \beta \iff x + f(x) \cdot f'(x) = \alpha x + \beta$$

$f(x) = y$ とおくと, $x = 0$ のとき, $y = k$ で,

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = (\alpha - 1)x + \beta$$

辺々を x で積分すると,

$$\int y dy = \int \{(\alpha - 1)x + \beta\} dx$$

$$\iff \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} (\alpha - 1)x^2 + \beta x + C$$

$$x = 0, y = k \text{ を代入して, } C = \frac{1}{2} k^2$$

よって,

$$(1 - \alpha)x^2 - 2\beta x + y^2 = k^2 \quad \text{.....②}$$

よって, $y = f(x)$ のグラフは 2 次曲線の一部分である.

(4)

②がだ円になる必要条件は, $k \neq 0$ かつ $1 - \alpha > 0$, $k \neq 0$, $\alpha < 1$

をみたすことで, このとき,

$$\textcircled{2} \iff x^2 - \frac{2\beta}{1-\alpha}x + \frac{y^2}{1-\alpha} = \frac{k^2}{1-\alpha}$$

$$\iff \left(x - \frac{\beta}{1-\alpha}\right)^2 + \frac{y^2}{1-\alpha} = \frac{k^2}{1-\alpha} + \frac{\beta^2}{(1-\alpha)^2}$$

$$\parallel A^2 \text{ とおく } \begin{cases} A^2 \text{ は定数} \\ A^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\iff \frac{\left(x - \frac{\beta}{1-\alpha}\right)^2}{A^2} + \frac{y^2}{(1-\alpha) \cdot A^2} = 1 \quad \text{.....③}$$

だ円③の 2 つの焦点が x 軸上にあるためには,

$$\alpha < 1 \text{ かつ } 1 - \alpha < 1 \text{ より, } 0 < \alpha < 1 \quad \text{.....(う)}$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{(1-\alpha) \cdot A^2} = 1 \text{ の焦点を } (\pm c, 0) \quad (c > 0) \text{ とおくと,}$$

$$c^2 = A^2 - (1-\alpha)A^2 = \alpha A^2 = \frac{\alpha k^2}{1-\alpha} + \frac{\alpha \beta^2}{(1-\alpha)^2}$$

$$\therefore c = \sqrt{\frac{\alpha k^2}{1-\alpha} + \frac{\alpha \beta^2}{(1-\alpha)^2}}$$

よって,

$$\textcircled{3} \text{ の焦点の } x \text{ 座標は } x = \pm \sqrt{\frac{\alpha k^2}{1-\alpha} + \frac{\alpha \beta^2}{(1-\alpha)^2}} \text{ を}$$

x 軸方向に $\frac{\beta}{1-\alpha}$ だけ平行移動して,

$$\frac{\beta}{1-\alpha} \pm \sqrt{\frac{\alpha k^2}{1-\alpha} + \frac{\alpha \beta^2}{(1-\alpha)^2}} \quad \text{.....(え), (お)}$$

$$[IV] \quad f_0(x)=1, \quad f_1(x)=x$$

$$f_{n+1}(x)=2xf_n(x)-f_{n-1}(x) \quad \cdots \cdots (*) \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

(1) $(*)$ に $n=1, 2, 3, 4$ を代入して

$$f_2(x)=2xf_1(x)-f_0(x)=2x^2-1$$

$$f_3(x)=2xf_2(x)-f_1(x)=2x(2x^2-1)-x=4x^3-3x$$

$$f_4(x)=2xf_3(x)-f_2(x)=2x(4x^3-3x)-(2x^2-1)=8x^4-8x^2+1$$

$$f_5(x)=2xf_4(x)-f_3(x)=2x(8x^4-8x^2+1)-(4x^3-3x)$$

$$\therefore f_5(x)=16x^5-20x^3+5x \quad \cdots \cdots (あ)$$

$$f_5(x)=0 \iff 16x^5-20x^3+5x=0$$

$$\iff x \cdot (16x^4-20x^2+5)=0$$

$$x=0, \quad 16x^4-20x^2+5=0 \quad \text{から} \quad x^2=\frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$$

$$\therefore x=0, \quad \pm \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}} \quad (\text{複号任意}) \quad \cdots \cdots (い)$$

$$(2) f_n(\cos \theta)=\cos n\theta \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

$(\because) \quad n=1$ のとき, $\textcircled{1}$ の左辺 $=f_1(\cos \theta)=\cos \theta$
 $\textcircled{1}$ の右辺 $=\cos \theta$ より成り立つ.

$n=2$ のとき, $\textcircled{1}$ の左辺 $=f_2(\cos \theta)=2\cos^2 \theta-1=\cos 2\theta$
 $\textcircled{1}$ の右辺 $=\cos 2\theta$ となり成り立つ.

$n=k, k+1$ のとき, 成り立つと仮定する.

すなわち, $f_k(\cos \theta)=\cos k\theta, \quad f_{k+1}(\cos \theta)=\cos (k+1)\theta$

$n=k+2$ のとき, $(*)$ より

$$f_{k+2}(\cos \theta)=2\cos \theta \cdot f_{k+1}(\cos \theta)-f_k(\cos \theta)$$

$$=2\cos (k+1)\theta \cdot \cos \theta-\cos k\theta$$

$$=\cos (k+2)\theta+\cos k\theta-\cos k\theta$$

$$=\cos (k+2)\theta$$

となり, $n=k+2$ のときも成り立つ.

以上より, 数学的帰納法から, すべての自然数 n で $\textcircled{1}$ は成り立つ. ■

$$(3) x=\cos \frac{\pi}{10} \text{ とおくと, } (2) \text{ より}$$

$$f_5\left(\cos \frac{\pi}{10}\right)=\cos 5 \cdot \frac{\pi}{10}=\cos \frac{\pi}{2}=0$$

$$f_5\left(\cos \frac{\pi}{10}\right)=0 \text{ の解は } (1) \text{ より}$$

$$x=0, \quad \pm \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}} \text{ のどれかであるが,}$$

$$\cos \frac{\pi}{10} \text{ は } \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{4} < \cos \frac{\pi}{10} < 1 \text{ } x \text{ であり,}$$

$$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{となるから}$$

$$\cos \frac{\pi}{10}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}} \quad \cdots \cdots (う)$$

$$(4) y=f_n(x) \quad (-1 < x < 1) \quad n: 3 \text{ 以上の奇数}$$

$$x=\cos \theta \text{ とおくと, } \quad (\theta \neq l\pi, \quad l: \text{整数})$$

$$y=f_n(\cos \theta)=\cos n\theta \quad (n=3, 5, 7, \cdots)$$

$$\frac{dy}{d\theta}=-n \sin n\theta \text{ で, } \frac{d\theta}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{d\theta}}=-\frac{1}{\sin \theta}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx}=\frac{n \sin n\theta}{\sin \theta}$$

$$y'=0 \text{ なる } \theta \text{ は } \sin n\theta=0 \text{ なる } \theta \text{ で } n\theta=k\pi$$

$$\text{から } \theta=\frac{k\pi}{n} \quad (k \text{ は } \theta \neq l\pi \text{ より } n \text{ の倍数でない整数})$$

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

$$=\frac{n^2 \cos n\theta \cdot \sin \theta-n \sin n\theta \cdot \cos \theta}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{-1}{\sin \theta}$$

$$=-\frac{n^2 \cdot \cos n\theta}{\sin^2 \theta}+\frac{n \sin n\theta \cdot \cos \theta}{\sin^3 \theta}$$

$$\theta=\frac{k\pi}{n} \quad (k \text{ は } n \text{ の倍数ではない整数) \text{ のとき,}$$

$$y''=-\frac{n^2 \cos k\pi}{\sin^2 \frac{k\pi}{n}} \quad \text{極大になるのは } y''>0 \text{ のときで, } k: \text{偶数}$$

$$\text{このとき, 極大値 } 1 \quad \cdots \cdots (え)$$

このときの

$$x \text{ は } x=\cos \frac{k\pi}{n} \quad (k \text{ は偶数で } n \text{ の倍数でない整数}) \quad \cdots \cdots (お)$$

(4) 別解

$y=f_n(x) \quad (-1 < x < 1)$ は, $x=\cos \theta \quad (0 < \theta < \pi)$ とおくとき,

x は θ の関数として単調減少

$$y=f_n(\cos \theta)=\cos n\theta$$

$y=\cos n\theta$ のグラフは $(0 < \theta < \pi)$ の範囲でかくと $(n$ が 3 以上の奇数)

$$\text{極大値 } 1 \quad \cdots \cdots (え)$$

$$x=\cos \frac{k\pi}{n} \quad \cdots \cdots (お)$$

$$\left(\begin{array}{l} k \text{ は偶数で} \\ n \text{ の倍数でない整数} \end{array} \right)$$

