

[I]

(1)	(あ)	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	(い)	$\frac{2}{\sqrt{5}}$
(2)	(う)	-7	(え)	10
(3)	(お)	$\log 3 - 1$	(か)	$\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

[II]

(1)	(あ)	$\sqrt{a^2 + 2a + 2}$	(い)	$\sqrt{a^2 - 4a + 11}$
(2)(i)	(う)	$\frac{3\sqrt{2}}{8}$	(え)	6

(2) (ii)

$Q(x, y)$ で $y \geq 1$ のときの $r(Q)$ を $r_1(Q)$

$y < 1$ のときの $r(Q)$ を $r_2(Q)$ とおく.

(i) $y \geq 1$ ($x \geq 1$) のとき,

$$\begin{aligned} \{r_1(Q)\}^2 &= \overline{AQ}^2 = (x-a)^2 + y^2 \\ &= (x-a)^2 + (2x^2 - 1) \\ &= 3x^2 - 2ax + a^2 - 1 \\ &= 3\left(x - \frac{a}{3}\right)^2 + \frac{2a^2}{3} - 1 \quad (x \geq 1, y \geq 1) \end{aligned}$$

よって, $\frac{a}{3} > 1 \iff a > 3, \frac{a}{3} \leq 1 \iff a \leq 3$ により

$$\{r_1(Q)\}^2 \text{ は } \begin{cases} a \leq 3 \text{ のとき, } (1, 1) \text{ で最小で} \\ \text{最小値 } a^2 - 2a + 2 \\ a > 3 \text{ のとき, } x = \frac{a}{3} \text{ で最小で} \\ \text{最小値 } \frac{2}{3}a^2 - 1 \end{cases}$$

(ii) $y < 1$ のとき,

$A(a, 0)$ の $y = x$ に関する対称点を $A'(0, a)$ とすると,

$$\begin{aligned} \{r_2(Q)\}^2 &= \overline{A'Q}^2 = x^2 + (y-a)^2 = \frac{1}{2}(y^2 + 1) + (y-a)^2 \\ &= \frac{3}{2}y^2 - 2ay + a^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\left(y - \frac{2}{3}a\right)^2 + \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{2} \quad (y < 1) \end{aligned}$$

$$\{r_2(Q)\}^2 \text{ は } \begin{cases} a < \frac{3}{2} \text{ のとき, } y = \frac{2}{3}a \text{ で最小で} & \text{最小値 } \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \leq a \text{ のとき, } (x, y) = (1, 1) \text{ で最小で} & \text{最小値 } a^2 - 2a + 2 \end{cases}$$

$\{r_1(Q)\}^2$ と $\{r_2(Q)\}^2$ の最小値の大小を比較する.

$$\textcircled{1} \quad a < \frac{3}{2} \text{ のとき, } a^2 - 2a + 2 - \left(\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}(2a-3)^2 > 0$$

より, $\{r_2(Q)\}^2$ が最小で, これは $(1, 1)$ で最小にならず不適.

$$\textcircled{2} \quad \frac{3}{2} \leq a \leq 3 \text{ のとき, } \{r_1(Q)\}^2 \text{ と } \{r_2(Q)\}^2 \text{ がともに点 } (1, 1) \text{ で最小値の } a^2 - 2a + 2 \text{ をもつ.}$$

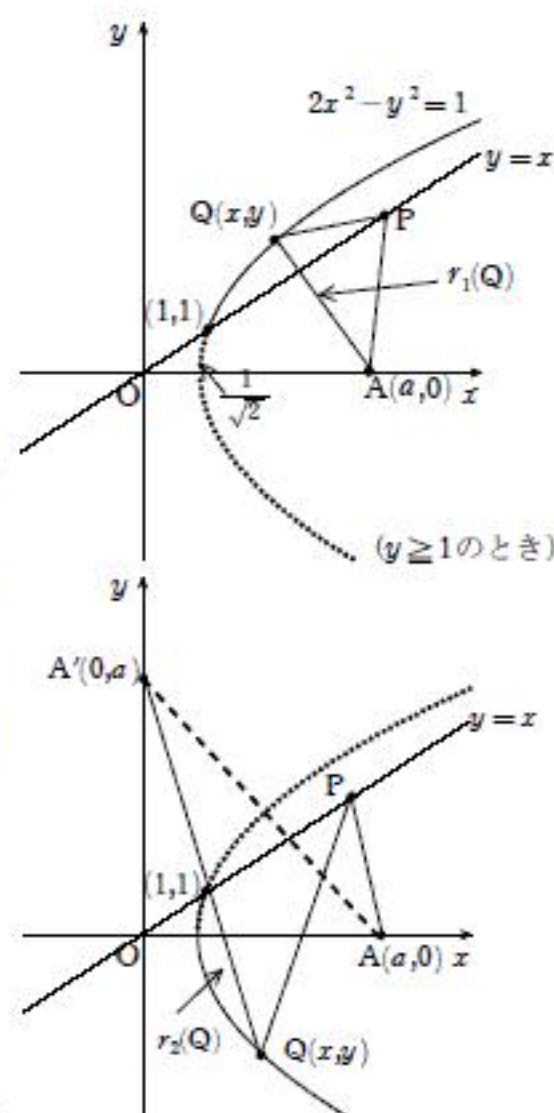
$\textcircled{3} \quad 3 < a$ のとき,

$$a^2 - 2a + 2 - \left(\frac{2}{3}a^2 - 1\right) = \frac{1}{3}(a-3)^2 > 0$$

より, $\{r_2(Q)\}^2$ が最小で, これは $(1, 1)$ で最小とならず不適.

以上 $\textcircled{1} \sim \textcircled{3}$ から, 求める a の値の範囲は,

$$\frac{3}{2} \leq a \leq 3 \quad \dots\dots(\text{答})$$



〔Ⅲ〕

$$(1) \quad a_1 = \boxed{\frac{3}{4}} \dots (\text{あ}) \quad b_1 = \boxed{\frac{1}{4}} \dots (\text{い})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_n = \boxed{\frac{3}{4}}_{(\text{う})} a_{n-1} + \boxed{\frac{1}{8}}_{(\text{え})} b_{n-1} \\ b_n = \boxed{\frac{1}{4}}_{(\text{お})} a_{n-1} + \boxed{\frac{5}{8}}_{(\text{か})} b_{n-1} \end{array} \right.$$

$$a_n - b_n = \boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \dots (\text{き})$$

$$a_n + \frac{1}{2}b_n = \boxed{\left(\frac{7}{8}\right)^n} \dots (\text{く})$$

$$(2) \quad c_n = \boxed{\frac{1}{6} \left\{ \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\}} \dots (\text{け})$$

$$(3) \quad d_n = \sum_{k=1}^{n-2} \boxed{\frac{1}{60} \left(\frac{9}{10}\right)^{n-k-2} \cdot \left\{ \left(\frac{7}{8}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^k \right\}} \dots (\text{こ})$$

[IV]

$$(1) \quad S(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\boxed{xf'(x) - f(x)} \right)^2_{(あ)}}{\boxed{-f'(x)}_{(い)}}$$

$$(2) \quad \frac{d}{dx} \log S(x) = \frac{\boxed{f''(x)\{xf'(x) + f(x)\}}_{(5)}}{\boxed{f'(x)\{xf'(x) - f(x)\}}_{(え)}}$$

(3)

(2) より

$$\frac{d}{dx} \log S(x) = \frac{S'(x)}{S(x)} = \frac{\overset{= (あ)}{f''(x)} \{xf'(x) + f(x)\}}{\underset{= (え)}{f'(x)} \underset{(イ)}{\{xf'(x) - f(x)\}}}$$

$f'(x) < 0$ かつ $f(a) = 0$ より, $0 \leq x \leq a$ で $f(x) \geq 0$

また, $f''(x) < 0$ であるから, $S'(x)$ の符号を調べるためには, $xf'(x) + f(x)$ の符号を調べればよい.

$g(x) = xf'(x) + f(x)$ とおくと,

$$g'(x) = f'(x) + xf''(x) + f'(x) = 2f'(x) + xf''(x) < 0$$

$$g(0) = f(0) > 0, \quad g(a) = \underset{=0}{af'(a) + f(a)} = af'(a) < 0 \text{ かつ } g(x) \text{ は } 0 \leq x \leq a \text{ で}$$

単調に減少する関数となり, $g(x) = 0$ なる x が $0 < x < a$ にただ 1 つ存在する.

(中間値の定理)

この解を $x = c$ とおくと,

x	0		c		a
$S'(x)$		-	0	+	
$S(x)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$	

これより, $S(x)$ を最小にする c が $0 < x < a$ にただ 1 つ存在する.

$$(4) \quad x_0 = \boxed{\frac{2}{3}} \cdots (\text{お})$$