〔Ⅰ〕

(1) $P(x)=(x^2-4)A(x)$ （$A(x)$：整式）

$\iff x^n-ax^2-bx+2=(x+2)(x-2)A(x)$ ……①

①で $x=2,\ -2$ を代入 $\begin{cases}2^n-4a-2b+2=0\\(-2)^n-4a+2b+2=0\end{cases}$

$\therefore\ \underline{a=\dfrac{2^n+(-2)^n+4}{8}=\dfrac{1}{2}}$ (あ) ……(答)

$\underline{b=\dfrac{2^n-(-2)^n}{4}=2^{n-1}}$ (い) ……(答)

$P(x)=(x+1)^2B(x)$ （$B(x)$：整式）

$\iff x^n-ax^2-bx+2=(x+1)^2B(x)$ ……②

②の辺々を x で微分して，

$nx^{n-1}-2ax-b=2(x+1)B(x)+(x+1)^2B'(x)$ ……③

②，③で $x=-1$ を代入

$\begin{cases}(-1)^n-a+b+2=0\\n(-1)^{n-1}+2a-b=0\end{cases}$ $\therefore\ \underline{a=-n-1\ \text{(う)},\ b=-n-2\ \text{(え)}}$ ……(答)

(2) $A=BC$

$\iff \begin{pmatrix}1&1\\5&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u&0\\0&v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ （ただし，$0<\theta<\pi$）

$\iff \begin{cases}1=u\cos\theta & \text{……④}\\1=-u\sin\theta & \text{……⑤}\\5=v\sin\theta & \text{……⑥}\\x=v\cos\theta & \text{……⑦}\end{cases}$

④と⑤より

$u^2=2 \quad \therefore\ u=\pm\sqrt{2}$

(i) $u=\sqrt{2}$ のとき $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\\sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$ となり，$0<\theta<\pi$ の実数 θ は存在せず不適．

(ii) $\underline{u=-\sqrt{2}}$ のとき $\begin{cases}\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$ となり，$\underline{\theta=\dfrac{3}{4}\pi}$ （$0<\theta<\pi$ を満たし適）

⑥，⑦へ代入して，$\begin{cases}5=\dfrac{1}{\sqrt{2}}v\\x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}v\end{cases}$ $\therefore\ v=5\sqrt{2},\ x=-5$

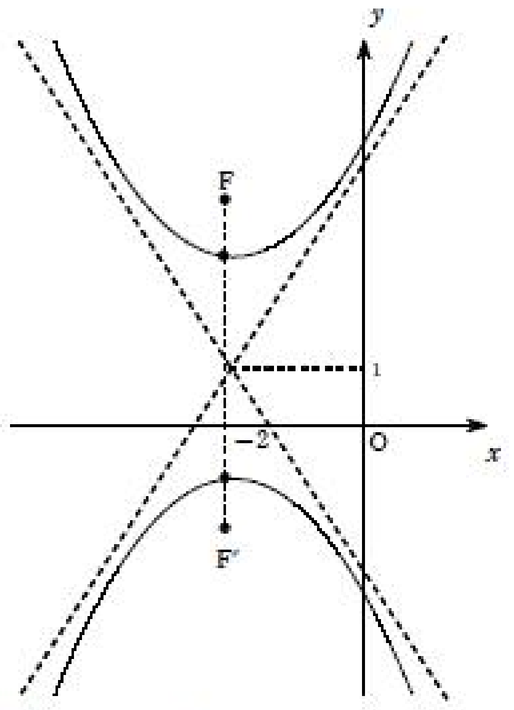
以上まとめて，

$\underline{x=-5\ \text{(お)},\ u=-\sqrt{2}\ \text{(か)},\ v=5\sqrt{2}\ \text{(き)},\ \theta=\dfrac{3}{4}\pi\ \text{(く)}}$ ……(答)

(3) $2x^2-y^2+8x+2y+11=0$

$\iff 2(x+2)^2-(y-1)^2=-4$

$\iff \dfrac{(x+2)^2}{\sqrt{2}^2}-\dfrac{(y-1)^2}{2^2}=-1$



$\underline{\text{頂点}\ (-2\ \text{(け)},\ 3\ \text{(こ)})\ \text{と}\ (-2\ \text{(さ)},\ -1\ \text{(し)})}$ （逆の順序でも可） ……(答)

$\underline{\text{焦点}\ (-2\ \text{(す)},\ 1+\sqrt{6}\ \text{(せ)})\ \text{と}\ (-2\ \text{(そ)},\ 1-\sqrt{6}\ \text{(た)})}$ （逆の順序でも可） ……(答)

漸近線の方程式は

$\underline{y=\sqrt{2}x+2\sqrt{2}+1\ \text{(ち)},\ y=-\sqrt{2}x-2\sqrt{2}+1\ \text{(つ)}}$ （逆の順序でも可） ……(答)

〔II〕

(1)　1 or 2が少なくとも1回は取り出されるから

$$\underline{P=1-\left(\frac{n-2}{n}\right)^r \ \boxed{(あ)}}\ \cdots\cdots(答)$$

(2)　$A\subset\{1,2\}$となる事象をE, $A\subset\{1,3\}$となる事象をFとする.

$$P(E)=\left(\frac{2}{n}\right)^r,\ P(F)=\left(\frac{2}{n}\right)^r$$

$$P(E\cap F)=\left(\frac{1}{n}\right)^r \leftarrow A\subset\{1\}$$

これより,

$$P(E\cap F)=P(E)+P(F)-P(E\cap F)$$

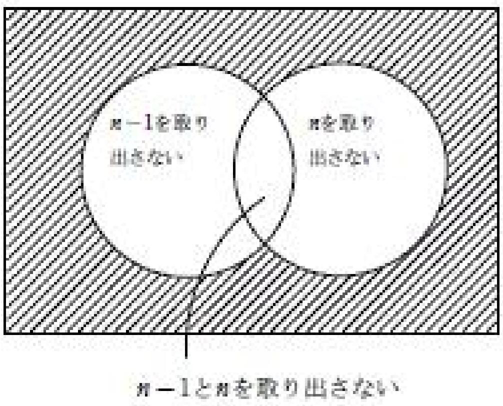
$$=\left(\frac{2}{n}\right)^r+\left(\frac{2}{n}\right)^r-\left(\frac{1}{n}\right)^r$$

$$=\underline{2\left(\frac{2}{n}\right)^r-\left(\frac{1}{n}\right)^r \ \boxed{(い)}}\ \cdots\cdots(答)$$

(3)　${}_n\mathrm{C}_2=\frac{n(n-1)}{2}$より

$$P=\frac{n(n-1)}{2}\left\{\left(\frac{2}{n}\right)^r-2\left(\frac{1}{n}\right)^r\right\}$$

$$=\underline{(n-1)\left\{\left(\frac{2}{n}\right)^{r-1}-\left(\frac{1}{n}\right)^{r-1}\right\}}\ \boxed{(う)}\ \cdots\cdots(答)$$



(4)

$$P=1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^r-\left(\frac{n-1}{n}\right)^r+\left(\frac{n-2}{n}\right)^r$$

$$=\underline{1-2\left(\frac{n-1}{n}\right)^r+\left(\frac{n-2}{n}\right)^r \ \boxed{(え)}}\ \cdots\cdots(答)$$

(5)

$$P_k=P(X\leqq k)-P(X\leqq k-1) \leftarrow \text{集合 }A\text{ の要素の最大を }(X)$$

$$=\underline{\left(\frac{k}{n}\right)^r-\left(\frac{k-1}{n}\right)^r \ \boxed{(お)}}\ \cdots\cdots(答)$$

($k\geqq 2$ であるが, $k=1$ のときも満たす)

(6)

$$E=\sum_{k=1}^{n}2^k\cdot P_k$$

$$=2^1\cdot\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2-0\right\}+2^2\cdot\left\{\left(\frac{2}{n}\right)^2-\left(\frac{1}{n}\right)^2\right\}+2^3\cdot\left\{\left(\frac{3}{n}\right)^2-\left(\frac{2}{n}\right)^2\right\}+\cdots$$

$$\cdots+2^n\cdot\left\{\left(\frac{n}{n}\right)^2-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{n^2}\{1\cdot 2^1+3\cdot 2^2+5\cdot 2^3+\cdots+(2n-1)\cdot 2^n\}$$

$S=1\cdot 2^1+3\cdot 2^2+5\cdot 2^3+\cdots+(2n-1)\cdot 2^n$ とおく.

$$\begin{array}{rl} S= & 1\cdot 2^1+3\cdot 2^2+5\cdot 2^3+\cdots+(2n-1)\cdot 2^n \\ -)\ 2S= & \qquad 1\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+(2n-3)\cdot 2^n+(2n-1)\cdot 2^{n+1} \\ \hline -S= & 2^1+2(2^2+2^3+\cdots+2^n)-(2n-1)\cdot 2^{n+1} \end{array}$$

$$=2+2\cdot\frac{4(2^{n-1}-1)}{2-1}-(2n-1)\cdot 2^{n+1}$$

$$=(3-2n)\cdot 2^{n+1}-6$$

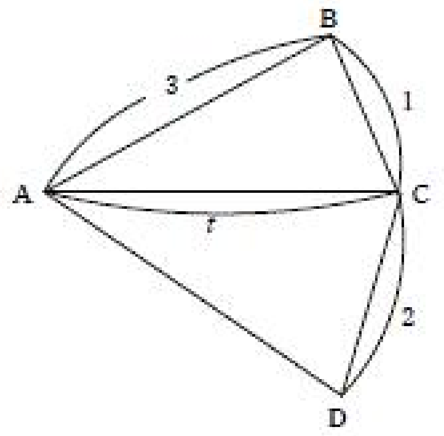
$$\therefore\ S=(2n-3)\cdot 2^{n+1}+6$$

以上より,

$$\underline{E=\frac{1}{n^2}\{(2n-3)\cdot 2^{n+1}+6\}}\ \cdots\cdots(答)$$

〔Ⅲ〕

(1) $\cos\angle \mathrm{ABC}=\dfrac{9+1-t^2}{2\cdot 3\cdot 1}=\dfrac{1}{6}(10-t^2)$



これより,

$$\sin\angle \mathrm{ABC}=\sqrt{1-\frac{1}{36}(10-t^2)^2}$$
$$=\frac{1}{6}\sqrt{-t^4+20t^2-64}$$

△ABC の外接円の半径 $R\,(>0)$ に対して, 正弦定理より

$$2R=\frac{t}{\frac{1}{6}\sqrt{-t^4+20t^2-64}} \qquad \therefore\ R=\frac{3t}{\sqrt{-t^4+20t^2-64}}$$ (あ) ……(答)

ここで, $R=\dfrac{3}{\sqrt{20-\left(t^2+\dfrac{64}{t^2}\right)}} \geqq \dfrac{3}{\sqrt{20-16}}=\dfrac{3}{2}$ (最小値)

等号成立は $t^2=\dfrac{64}{t^2} \iff t^4=64 \quad \therefore\ t=2\sqrt{2}$ (い) ……(答)

$\mathrm{AD}=x$ とおくと, 余弦定理より,

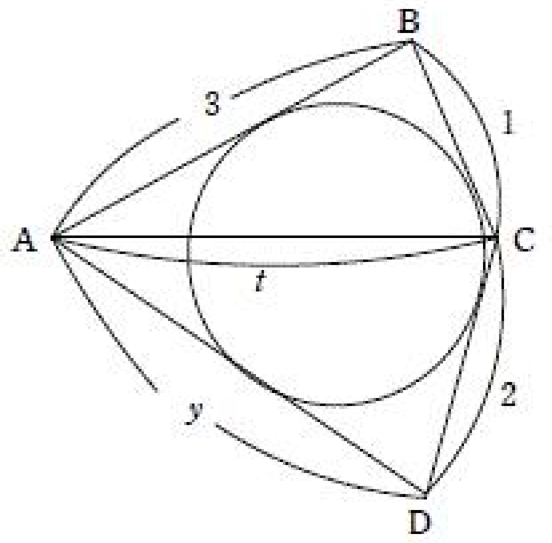
$$x^2+2^2-2\cdot x\cdot 2\cos(\pi-\angle \mathrm{ABC})=t^2$$
$$\iff x^2+4+4x\cos\angle \mathrm{ABC}=t^2$$
$$\iff x^2+4+4x\cdot\frac{1}{6}(10-t^2)=t^2$$
$$\iff x^2+\frac{2}{3}(10-t^2)x+4-t^2=0$$
$$\therefore\ \mathrm{AD}=x=-\frac{1}{3}(10-t^2)+\frac{1}{3}\sqrt{t^4-11t^2+64}$$ (う) ……(答)

(2) △ABC の内接円の半径 $r\,(>0)$ に対して,

$$\frac{r}{2}(3+1+t)=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1\cdot \sin\angle \mathrm{ABC}$$
$$\iff \frac{r}{2}(4+t)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}\sqrt{-t^4+20t^2-64} \qquad \therefore\ r=\frac{\sqrt{-t^4+20t^2-64}}{2(t+4)}$$ (え) ……(答)

(3) $\mathrm{AD}=y$ とすると,

$1+y=3+2 \ \therefore\ \mathrm{AD}=y=4$ (お) ……(答)



$$\cos\angle \mathrm{ADC}=\frac{16+4-t^2}{2\cdot 4\cdot 2}=\frac{1}{16}(20-t^2)$$

これより,

$$\sin\angle \mathrm{ADC}=\sqrt{1-\frac{1}{256}(20-t^2)^2}$$
$$=\frac{1}{16}\sqrt{-t^4+40t^2-144}$$

四角形ABCD の内接円の半径を r' とすると,

$$\frac{r'}{2}(3+1+2+4)=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 1\cdot\frac{1}{6}\sqrt{-t^4+20t^2-64}+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot\frac{1}{16}\sqrt{-t^4+40t^2-144}$$
$$\iff 5r'=\frac{1}{4}\sqrt{-t^4+20t^2-64}+\frac{1}{4}\sqrt{-t^4+40t^2-144}$$
$$\therefore\ r'=\frac{1}{20}\left(\sqrt{-t^4+20t^2-64}+\sqrt{-t^4+40t^2-144}\right)$$ (か) ……(答)

ここで, $u=t^2$ ($2<t<4$ より $4<u<16$) とおき,

$f(u)=\sqrt{-u^2+20u-64}+\sqrt{-u^2+40u-144}$ とする.

$$f'(u)=\frac{-2u+20}{2\sqrt{-u^2+20u-64}}+\frac{-2u+40}{2\sqrt{-u^2+40u-144}}$$
$$=\frac{10-u}{\sqrt{(u-4)(16-u)}}+\frac{20-u}{\sqrt{(u-4)(36-u)}}$$
$$=\frac{(10-u)\sqrt{36-u}+(20-u)\sqrt{16-u}}{\sqrt{(u-4)(16-u)(36-u)}}$$

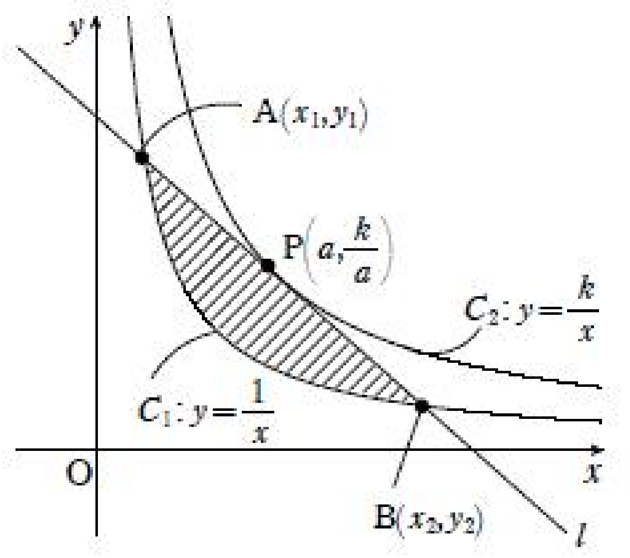
増減表を描くと次の通り.

u	(4)	$\cdots$	$\frac{140}{11}$	$\cdots$	(16)
$f'(u)$		+	0	−	
$f(u)$		↗	(最大)	↘	

増減表より, $u=\dfrac{140}{11}$ にて $f(u)$ は最大, つまり r' は最大となる.

このとき, $t^2=u=\dfrac{140}{11}$ より, $t=\sqrt{\dfrac{140}{11}}$ (き) ……(答)

〔IV〕



(1) $l : y = m(x-a) + \dfrac{k}{a}$

$\iff y = mx - am + \dfrac{k}{a}$

これと, $y = \dfrac{1}{x}$ を連立して,

$mx - am + \dfrac{k}{a} = \dfrac{1}{x}$

$\iff mx^2 + \left(\dfrac{k}{a} - am\right)x - 1 = 0$ ……①

$k > 1$, $m < 0$ のもとで①は異なる 2 実解をもち,

解と係数の関係より, $\begin{cases} x_1 + x_2 = a - \dfrac{k}{am} \\ x_1 x_2 = -\dfrac{1}{m} \end{cases}$

$\mathrm{AB} = \sqrt{m^2+1}(x_2 - x_1)$ であり,

$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$

$= \left(a - \dfrac{k}{am}\right)^2 + \dfrac{4}{m}$ $\quad \therefore$ $\underline{\mathrm{AB} = \sqrt{(m^2+1)\left\{\left(a - \dfrac{k}{am}\right)^2 + \dfrac{4}{m}\right\}}}$ ……(答)

$(m^2+1)\left\{\left(a - \dfrac{k}{am}\right)^2 + \dfrac{4}{m}\right\} \geqq (m^2+1) \cdot \dfrac{4}{m}$ より,

等号成立は, $a^2 = \dfrac{k^2}{a^2m^2} \iff a^4 = \dfrac{k^2}{m^2}$ $\quad \therefore$ $\underline{a = \sqrt{-\dfrac{k}{m}}}$ [い] ……(答)

(2) $\mathrm{AP} = \mathrm{PB} \iff \dfrac{x_1 + x_2}{2} = a \iff x_1 + x_2 = 2a$

これより, $2a = a - \dfrac{k}{am} \iff a = -\dfrac{k}{am} \iff \underline{m = -\dfrac{k}{a^2}}$ [う] ……(答)

(3) (1)を用いて,

$\begin{cases} x_1(m) + x_2(m) = a - \dfrac{k}{am} \\ x_1(m) \cdot x_2(m) = -\dfrac{1}{m} \quad ……② \end{cases}$ $\quad \therefore \begin{cases} \dfrac{dx_1(m)}{dm} + \dfrac{dx_2(m)}{dm} = \dfrac{k}{am^2} \\ \dfrac{d}{dm}\{x_1(m) \cdot x_2(m)\} = \dfrac{1}{m^2} \quad ……③ \end{cases}$

$\dfrac{dx_1(m)}{dm} \cdot x_2(m) + x_1(m) \cdot \dfrac{dx_2(m)}{dm} = \dfrac{1}{m^2}$ より,

$S(m) = \displaystyle\int_{x_1(m)}^{x_2(m)} \left(mx - am + \dfrac{k}{a} - \dfrac{1}{x}\right)dx$

$= \left[\dfrac{m}{2}x^2 + \left(\dfrac{k}{a} - am\right)x - \log x\right]_{x_1(m)}^{x_2(m)}$

$= \dfrac{m}{2}\{x_2{}^2(m) - x_1{}^2(m)\} + \left(\dfrac{k}{a} - am\right)\{x_2(m) - x_1(m)\} - \log x_2(m) + \log x_1(m)$

$\therefore \dfrac{d}{dm}S(m) = \dfrac{1}{2}\{x_2{}^2(m) - x_1{}^2(m)\} + \dfrac{m}{2}\left\{2x_2(m) \cdot \dfrac{dx_2(m)}{dm} - 2x_1(m) \cdot \dfrac{dx_1(m)}{dm}\right\}$

$-a\{x_2(m) - x_1(m)\} + \left(\dfrac{k}{a} - am\right)\left\{\dfrac{dx_2(m)}{dm} - \dfrac{dx_1(m)}{dm}\right\}$

$-\dfrac{1}{x_2(m)} \cdot \dfrac{dx_2(m)}{dm} + \dfrac{1}{x_1(m)} \cdot \dfrac{dx_1(m)}{dm}$

$= \underline{\left(\dfrac{1}{2}\{x_2(m) + x_1(m)\} - a\right)\{x_2(m) - x_1(m)\}}$ $\quad$ ($\because$ ②, ③) ……(答)

ここで,

$\dfrac{1}{2}\{x_2(m) + x_1(m)\} - a = 0 \iff \dfrac{x_2(m) + x_1(m)}{2} = a$

$\iff m = -\dfrac{k}{a^2}$ $\quad$ ($\because$ (2))

増減表を描くと次の通りになる.

m	$(-\infty)$	$\cdots$	$-\dfrac{k}{a^2}$	$\cdots$	(0)
$\dfrac{d}{dm}S(m)$		$-$	0	$+$	
$S(m)$		↘	(最小)	↗	

増減表より, $m = -\dfrac{k}{a^2}$ にて, $S(m)$ は最小値をとることが示された. (証明終)

(4) $m = -\dfrac{k}{a^2}$ のとき, $x_1(m) + x_2(m) = a - (-a) = 2a$

$x_1(m) \cdot x_2(m) = \dfrac{a^2}{k}$ に注意して,

$\{x_1(m) - x_2(m)\}^2 = 4a^2\left(1 - \dfrac{1}{k}\right)$ $\quad \therefore$ $x_1(m) - x_2(m) = 2a\sqrt{1 - \dfrac{1}{k}}$

$S_0 = \dfrac{-\dfrac{k}{a^2}}{2} \cdot 2a \cdot 2a\sqrt{1 - \dfrac{1}{k}} + \left(\dfrac{k}{a} + \dfrac{k}{a}\right) \cdot 2a\sqrt{1 - \dfrac{1}{k}} - \log\left(2k - 1 + 2\sqrt{k^2 - k}\right)$

$= -2k\sqrt{1 - \dfrac{1}{k}} + 4k\sqrt{1 - \dfrac{1}{k}} - \log\left(2k - 1 + 2\sqrt{k^2 - k}\right)$

$= \underline{2k\sqrt{1 - \dfrac{1}{k}} - \log\left(2k - 1 + 2\sqrt{k^2 - k}\right)}$ [え] ……(答)

(注意)

$x_1{}^2(m) + 2x_1(m) \cdot x_2(m) + x_2{}^2(m) = 4a^2$ の辺々を $x_1(m) \cdot x_2(m) = \dfrac{a^2}{k}$ で割ると,

$\dfrac{x_1(m)}{x_2(m)} + 2 + \dfrac{x_2(m)}{x_1(m)} = 4k$ $\qquad X = \dfrac{x_2(m)}{x_1(m)}$ (>1) とおくと,

$\iff X + \dfrac{1}{X} = 4k - 2$

$\iff X^2 - 2(2k-1)X + 1 = 0$ $\qquad \therefore$ $\underline{2k - 1 + 2\sqrt{k^2 - k}}$