[I] (1) $a_{n+2} = -a_{n+1} + 2a_n \iff \begin{cases} a_{n+2}+2a_{n+1} = 1\,(a_{n+1}+2a_n) \\ a_{n+2}-a_{n+1} = -2\,(a_{n+1}-a_n)\end{cases}$

数列$\{a_{n+1}+2a_n\}$は初項 $a_2+2a_1=6$，公比1の等比数列

∴ $a_{n+1}+2a_n=6$ ……①

数列$\{a_{n+1}-a_n\}$は初項 $a_2-a_1=3$，公比-2の等比数列

∴ $a_{n+1}-a_n = 3\cdot(-2)^{n-1}$ ……②

以上①,②より $a_n = 2-(-2)^{n-1}$ $(n\geqq1)$

∴ $\boxed{(あ)} = 2-(-2)^{n-1}$

(2) $C'(x,y)$とおくと $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$ または

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{3}) & -\sin(-\frac{\pi}{3}) \\ \sin(-\frac{\pi}{3}) & \cos(-\frac{\pi}{3}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$

これより $A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1-\sqrt{3} \\ 2 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$ または $A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1+\sqrt{3} \\ 2 & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$

∴ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1-\sqrt{3} \\ 2 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$ または

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1+\sqrt{3} \\ 2 & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$

∴ $\boxed{(い)} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$

(3) $\begin{cases} x = \dfrac{e^t+3e^{-t}}{2} \\ y = e^t-2e^{-t} \end{cases}$ より $\begin{cases} e^t = \frac{1}{5}(4x+3y) \\ e^{-t} = \frac{1}{5}(2x-y) \end{cases}$

∴ $\frac{1}{5}(4x+3y)\cdot\frac{1}{5}(2x-y) = 1$

$\iff 8x^2+2xy-3y^2=25$ (曲線C)

$\boxed{(う)}=8$，$\boxed{(え)}=2$，$\boxed{(お)}=-3$

次に，$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(e^t-3e^{-t}) \\ \dfrac{dy}{dt} = e^t+2e^{-t} \end{cases}$ ∴ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{e^t+2e^{-t}}{\frac{1}{2}(e^t-3e^{-t})}$

ここで，$\dfrac{2(e^t+2e^{-t})}{e^t-3e^{-t}} = -2$

$\iff 2e^t+4e^{-t} = -2e^t+6e^{-t}$

$\iff 4e^t = 2e^{-t}$

$\iff e^{2t} = \frac{1}{2}$ ∴ $t = -\frac{1}{2}\log 2$ ∴ $\boxed{(か)} = -\frac{1}{2}\log 2$

(4) $f(x) = x - x^{\alpha}$ $(\alpha>1,\ 0\leqq x\leqq 1)$

$f'(x) = 1-\alpha x^{\alpha-1}$

増減表を書くと右図の通り

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt[\alpha-1]{\alpha}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	(最大)	$\searrow$	

これより $x(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt[\alpha-1]{\alpha}}$ ∴ $\boxed{(き)} = \dfrac{1}{\alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}}$

このとき，$\displaystyle\lim_{\alpha\to1+0} x(\alpha) = \lim_{\alpha\to1+0}\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\alpha-1}}} = \lim_{\beta\to+0}\frac{1}{(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}} = \frac{1}{e}$

$\beta=\alpha-1$ $(\beta\to+0)$

∴ $\boxed{(く)} = \frac{1}{e}$

[II]

(1) $(0,0) \to \overset{1回目}{(1,0)} \to \overset{2回目}{(0,0)} \to \overset{3回目}{(1,0)}$

または

$(0,0) \to (-1,0) \to (0,0) \to (1,0)$

のいずれかだから $P(\text{Pが3回後に}(1,0)) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 2 = \frac{1}{4}$ $\therefore$ $\boxed{(あ)} = \frac{1}{4}$

$(0,0) \to \overset{1回目}{(-1,0)} \to \overset{2回目}{(0,0)} \to \overset{3回目}{(-1,0)}$

または

$(0,0) \to (-1,0) \to (-2,0) \to (-1,0)$ ←…(注意)

または

$(0,0) \to (1,0) \to (0,0) \to (-1,0)$

のいずれかだから $P(\text{Pが3回後に}(-1,0)) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ $\therefore$ $\boxed{(い)} = \frac{1}{2}$

(2) 点Pが3回の操作の後(ただし、途中も含む)に原点(0,0)に来なければよいから

$P(U) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 1 = \frac{1}{2}$

点Qが3回の操作の後(ただし、途中も含む)に $x>0$ であればよいから

$P(V) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 1 = \frac{1}{4}$

ここで、$P(U \cap V) = P(U) \cdot P(V) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

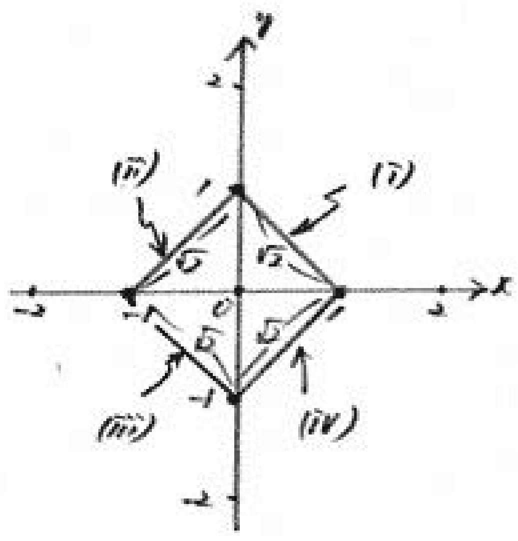
PとQは互いに独立だから

$\therefore$ $P(U \cup V) = P(U) + P(V) - P(U \cap V)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$

$= \frac{5}{8}$ $\therefore$ $\boxed{(う)} = \frac{5}{8}$

(3) $PQ = \sqrt{2}$ は操作1回後には必ず $PQ = \sqrt{2}$ となる。
操作2回後は $PQ \neq \sqrt{2}$ となるので、操作3回後
も $PQ \neq \sqrt{2}$ となれば、題意を満たす確率といえる。



(操作3回後に $PQ = \sqrt{2}$ を調べる)

(i) $P(1,0)$, $Q(0,1)$ のとき

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3\right\} \times \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3\right\} = \frac{1}{16}$

(ii) $P(-1,0)$, $Q(0,1)$ のとき

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

(iii) $P(-1,0)$, $Q(0,-1)$ のとき

$\frac{1}{2} \times \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} = \frac{1}{4}$

(iv) $P(1,0)$, $Q(0,-1)$ のとき

$\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

$P(\underbrace{PQ=\sqrt{2}}_{1回後}, \underbrace{PQ\neq\sqrt{2}}_{2回後}, \underbrace{PQ=\sqrt{2}}_{3回後}) = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{9}{16}$

$\therefore$ $P(\text{1回だけ } PQ=\sqrt{2}) = P(\text{1回後のみ } PQ=\sqrt{2})$

$= 1 - \frac{9}{16}$

$= \frac{7}{16}$ $\therefore$ $\boxed{(え)} = \frac{7}{16}$

(4) $PQ = X$ の数値は $X = \sqrt{2},\ 2,\ \sqrt{5},\ 2\sqrt{2}$ と考えられる。

$P(X=\sqrt{2}) = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 4\right\} \times \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 4\right\} = \frac{1}{4}$

$P(X=\sqrt{5}) = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 1\right\} \times \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 4\right\} \times 2 = \frac{1}{4}$

$P(X=2\sqrt{2}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 4 = \frac{1}{4}$

$P(X=2) = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$

確率分布表を描くと右の通り

X	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{5}$	$2\sqrt{2}$
$P(X)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

求める期待値(E)は、

$E = \frac{1}{4}(\sqrt{2} + 2 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2})$

$\therefore$ $\boxed{(お)} = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 3\sqrt{2} + 2)$

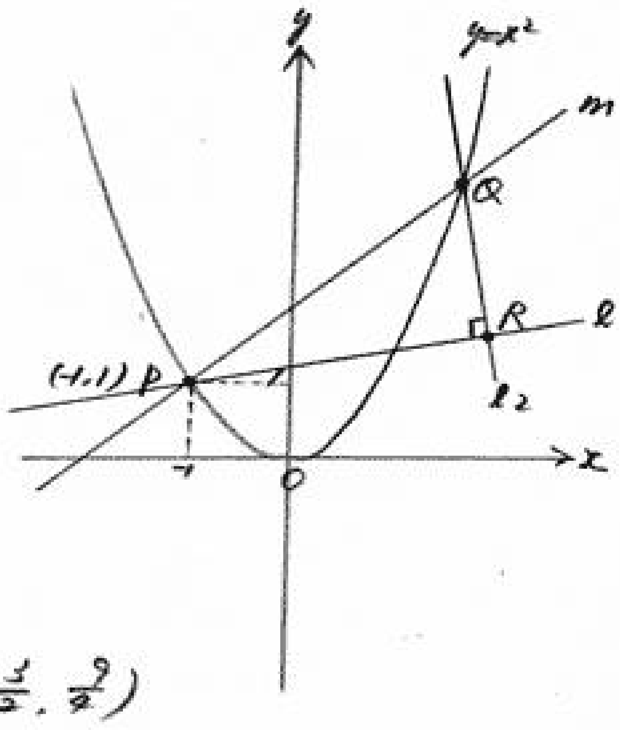
[III]

(1) 点P$(-1, 1)$での Cの法線を m とおく

$y=x^2$ より $y'=2x$ (接線の傾き)$=-2$

よって (法線の傾き)$=\frac{1}{2}$

m : $y=\frac{1}{2}(x+1)+1 \iff y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ ---①



①を用いて, $y=x^2$と連立し

$x^2=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

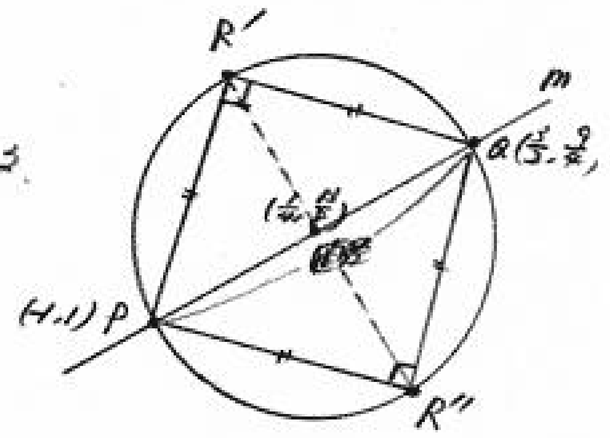
$\iff 2x^2-x-3=0$

$\iff (2x-3)(x+1)=0$ ∴ $x=-1, \frac{3}{2}$ ∴ Q$\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$

∴ $\boxed{(あ)}=\frac{3}{2}$, $\boxed{(い)}=\frac{9}{4}$

(2) $PQ=\left(\frac{3}{2}+1\right)\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{5\sqrt{5}}{4}$

であり, $\triangle PQR$の面積の最大値は PQを直径とする円周上にある点Rが $PR=QR$ の直角二等辺三角形となる場合である.



(面積の最大値)$=\frac{5\sqrt{5}}{8}\cdot\frac{5\sqrt{5}}{8}=\frac{125}{64}$

∴ $\boxed{(う)}=\frac{125}{64}$

このときの点Rは, 円 $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{13}{8}\right)^2=\frac{125}{64}$ と直線 $y=-2\left(x-\frac{1}{4}\right)+\frac{13}{8}$ の交点だから

$\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(-2x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{125}{64}$

$\iff 64x^2-32x-21=0$

$\iff (8x+3)(8x-7)=0$ ∴ $x=$(点Rのx座標)$=-\frac{3}{8}, \frac{7}{8}$

∴ R$\left(-\frac{3}{8}, \frac{23}{8}\right) \longrightarrow$ 傾き $t=3$

R$\left(\frac{7}{8}, \frac{3}{8}\right) \longrightarrow$ 傾き $t=-\frac{1}{3}$ ∴ $\boxed{(え)}=-\frac{1}{3}, 3$

(3) T(u, u^2) (ただし, $u\neq -1, \frac{3}{2}$) に対して

$\overrightarrow{TP}=(-1-u, 1-u^2)$, $\overrightarrow{TQ}=\left(\frac{3}{2}-u, \frac{9}{4}-u^2\right)$ より

$\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}=(-1-u)\left(\frac{3}{2}-u\right)+(1-u^2)\left(\frac{9}{4}-u^2\right)$

$=u^4-\frac{9}{4}u^2-\frac{1}{2}u+\frac{3}{4}$

ここで, $\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}<0$

$\iff u^4-\frac{9}{4}u^2-\frac{1}{2}u+\frac{3}{4}<0$

$\iff 4u^4-9u^2-2u+3<0$

$\iff (u+1)^2(2u-1)(2u-3)<0$

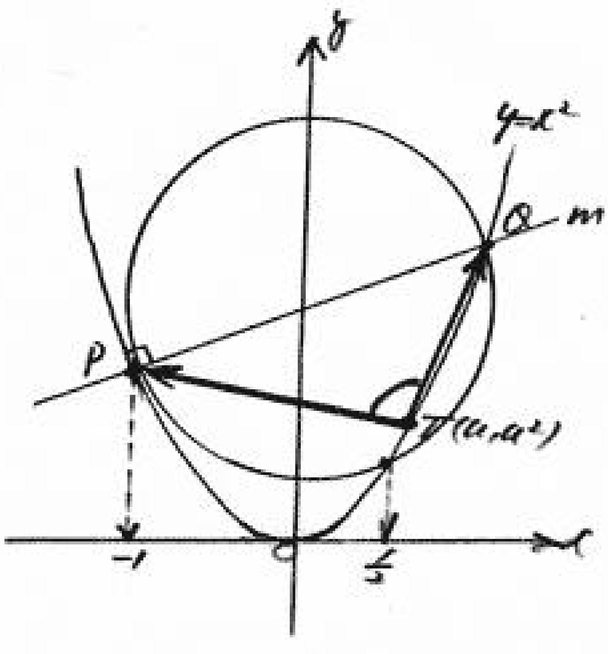
$\iff (2u-1)(2u-3)<0$ ($\because u\neq -1$)

∴ $\frac{1}{2}<u<\frac{3}{2}$ ($u\neq -1, \frac{3}{2}$ をみたす)

∴ $\boxed{(お)}=\frac{1}{2}$, $\boxed{(か)}=\frac{3}{2}$

(4) (3)において $\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}<0$ となるのは

$\angle PTQ>\frac{\pi}{2}$, つまり PQを直径とする円の内部に点T(u, u^2)が存在することである.



逆に考えれば $y<x^2$ に円の1部が含まれる範囲と読み換えられるから

∴ $\frac{1}{2}<u<\frac{3}{2}$

T$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$のとき $\longrightarrow$ 傾き $t=-\frac{1}{2}$

T$\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$のとき $\longrightarrow$ 傾き $t=\frac{1}{2}$

よって, $-\frac{1}{2}<t<\frac{1}{2}$ ∴ $\boxed{(き)}=-\frac{1}{2}$, $\boxed{(く)}=\frac{1}{2}$

［IV］

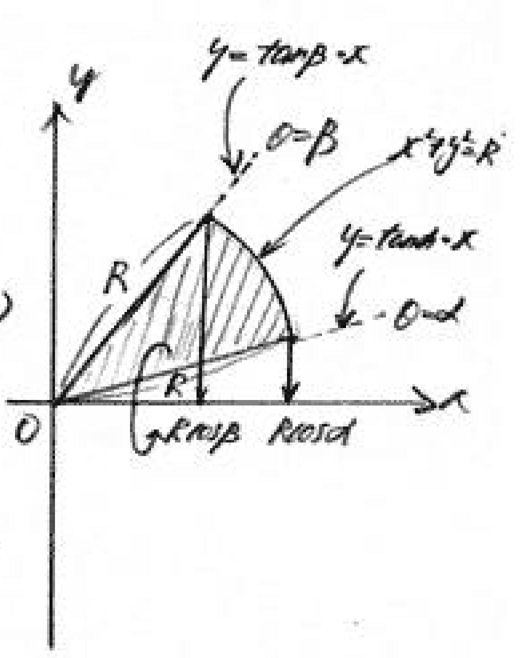
(1) $T=\int_0^{R\cos\beta}\pi(\tan\beta\cdot x)^2dx+\int_{R\cos\beta}^{R\cos\alpha}\pi(R^2-x^2)dx$

$-\int_0^{R\cos\alpha}\pi(\tan\alpha\cdot x)^2dx=\pi\tan^2\beta\cdot\dfrac{R^3\cos^3\beta}{3}+\pi R^2(R\cos\alpha-R\cos\beta)$

$-\dfrac{\pi}{3}(R^3\cos^3\alpha-R^3\cos^3\beta)-\pi\tan^2\alpha\cdot\dfrac{R^3\cos^3\alpha}{3}$

$=\dfrac{\pi R^3}{3}(\sin^2\beta\cos\beta+3\cos\alpha-3\cos\beta-\cos^3\alpha+\cos^3\beta-\sin^2\alpha\cos\alpha)$

$=\dfrac{2\pi R^3}{3}(\cos\alpha-\cos\beta)$ $\quad\therefore\ \boxed{(あ)}=\dfrac{2\pi R^3}{3}(\cos\alpha-\cos\beta)$



(2) (1)を利用して考える

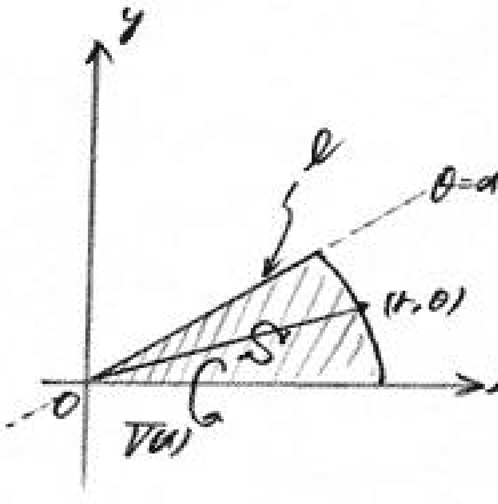
$\dfrac{d}{d\alpha}V(\alpha)=V'(\alpha)=\lim_{\beta\to\alpha}\dfrac{V(\beta)-V(\alpha)}{\beta-\alpha}$

ここで、 $f(\beta)\to f(\alpha)\quad(\beta\to\alpha)$ だから

$\dfrac{d}{d\alpha}V(\alpha)=\lim_{\beta\to\alpha}\dfrac{\frac{2\pi\{f(\alpha)\}^3}{3}(\cos\alpha-\cos\beta)}{\beta-\alpha}$

$=-\dfrac{2\pi\{f(\alpha)\}^3}{3}\underbrace{\lim_{\beta\to\alpha}\dfrac{\cos\beta-\cos\alpha}{\beta-\alpha}}_{=-\sin\alpha}$ (微分係数の定義より)

$=\dfrac{2\pi}{3}\{f(\alpha)\}^3\sin\alpha$ $\quad\therefore\ \boxed{(い)}=\dfrac{2\pi}{3}\{f(\alpha)\}^3\sin\alpha$



$V'(\alpha)=\dfrac{2\pi}{3}\{f(\alpha)\}^3\sin\alpha$ の両辺を区間$[0,\alpha]$で積分

(ただし、$V(0)=0$に注意)

$\int_0^{\alpha}V'(\theta)d\theta=\dfrac{2\pi}{3}\int_0^{\alpha}\{f(\theta)\}^3\sin\theta d\theta$

$\Leftrightarrow\quad V(\alpha)=\dfrac{2\pi}{3}\int_0^{\alpha}\{f(\theta)\}^3\sin\theta d\theta$

$\therefore\ \boxed{(う)}=\dfrac{2\pi}{3}\int_0^{\alpha}\{f(\theta)\}^3\sin\theta d\theta$

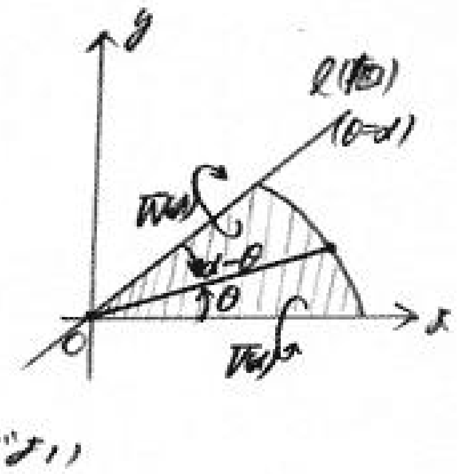
Sをx軸のまわりに回転させた立体の体積がV(α)

$\updownarrow$

Sをl軸のまわりに回転させた立体の体積がW(α)

これは $r=f(\theta)\longleftrightarrow r=f(\alpha-\theta)$ を切り替えればよい

$\therefore\ W(\alpha)=\dfrac{2\pi}{3}\int_0^{\alpha}\{f(\alpha-\theta)\}^3\sin\theta d\theta$ $\quad\therefore\ \boxed{(え)}=\dfrac{2\pi}{3}\int_0^{\alpha}\{f(\alpha-\theta)\}^3\sin\theta d\theta$



(3) $V(\frac{\pi}{4})=\dfrac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\sin\theta d\theta=\dfrac{\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin2\theta d\theta=\dfrac{\pi}{3}\left[-\dfrac{1}{2}\cos2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=\dfrac{\pi}{3}\left(0+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{6}$ $\quad\therefore\ \boxed{(お)}=\dfrac{\pi}{6}$

$W(\frac{\pi}{4})=\dfrac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)\sin\theta d\theta$

$=\dfrac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{1}{\sqrt2}\cos\theta+\dfrac{1}{\sqrt2}\sin\theta\right)\sin\theta d\theta$

$=\dfrac{\pi}{3\sqrt2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin2\theta d\theta+\dfrac{\pi}{3\sqrt2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos2\theta)d\theta$

$=\dfrac{\pi}{3\sqrt2}\left[-\dfrac{1}{2}\cos2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\dfrac{\pi}{3\sqrt2}\left[\theta-\dfrac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt2}{24}\pi^2$ $\quad\therefore\ \boxed{(か)}=\dfrac{\sqrt2}{24}\pi^2$