

[I] (1) $\cos \theta = x$, $\sin \theta = y$ とおくと,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 3y + x = 3 \end{cases}$$

この連立方程式を解いて, $(x, y) = (0, 1), \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

いま $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であるから, $(x, y) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

よって, $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2xy = \underline{\underline{\frac{24}{25}}}$

$$(2) 7^{\frac{1}{x}} = 9 \text{ より, } 7 = 9^x \quad \therefore x = \log_9 7 = \frac{\log_3 7}{2}$$

$$63^{\frac{1}{y}} = 3 \text{ より, } 63 = 3^y \quad \therefore y = \log_3 63 = 2 + \log_3 7$$

よって, $2x - y = \underline{\underline{-2}}$

$$(3) (i) \text{ 平面 } L \text{ の方程式は } \frac{x}{2} + \frac{y}{\sqrt{2}} + z = 1 \cdots \textcircled{1}$$

平面 L の法線ベクトルの 1 つとして $\vec{n} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ がとれるから,
実数 t を用いて,

$$\overrightarrow{QP} = t\vec{n} = \left(\frac{t}{2}, \frac{t}{\sqrt{2}}, t\right)$$

と表せる. このとき,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} = \left(\frac{t}{2}, \frac{t}{\sqrt{2}}, t+z\right)$$

であり, 点 P は平面 L 上にあるから, ①に代入して,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{t}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{t}{\sqrt{2}} + (t+z) = 1 \quad \therefore t = \frac{4}{7}(1-z)$$

よって,

$$\overrightarrow{OP} = \underline{\underline{\left(\frac{2}{7}(1-z), \frac{2\sqrt{2}}{7}(1-z), \frac{1}{7}(4+3z)\right)}}$$

(ii) ①より, 点と平面の距離公式を用いて,

$$QP = \frac{|z-1|}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1}} = \underline{\underline{\frac{2}{\sqrt{7}}|z-1|}}$$

(iii) P の z 座標が 0 のとき, $\frac{1}{7}(4+3z) = 0$ より $z = -\frac{4}{3}$

このとき, $P\left(\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, 0\right)$

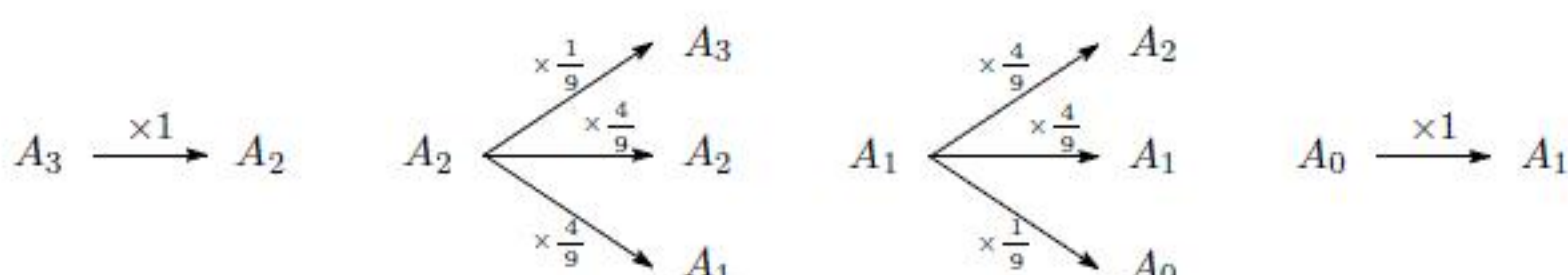
よって, $AP : PB = \underline{\underline{2 : 1}}$

[II] 袋 A に赤球が k 個入っている状態を A_k とかく ($k = 3, 2, 1, 0$) .

n 回の操作後に A_0 の状態にある確率を d_n とする.

$a_0 = 0, b_0 = 1, c_0 = 0, d_0 = 0$ と定義しておく.

1 回の操作による状態の推移の確率は次のようになる.



よって, $n \geq 0$ に対して次が成り立つ.

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{9}b_n \cdots \textcircled{1} \\ b_{n+1} = a_n + \frac{4}{9}b_n + \frac{4}{9}c_n \cdots \textcircled{2} \\ c_{n+1} = \frac{4}{9}b_n + \frac{4}{9}c_n + d_n \cdots \textcircled{3} \\ d_{n+1} = \frac{1}{9}c_n \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

(1) ①より, $a_1 = \frac{1}{9}b_0 = \underline{\underline{\frac{1}{9}}}$

②より, $b_1 = a_0 + \frac{4}{9}b_0 + \frac{4}{9}c_0 = \underline{\underline{\frac{4}{9}}}$

③より, $c_1 = \frac{4}{9}b_0 + \frac{4}{9}c_0 + d_0 = \underline{\underline{\frac{4}{9}}}$

(2) ② + ③ より, $(b_{n+1} + c_{n+1}) = (a_n + d_n) + \frac{8}{9}(b_n + c_n)$

$a_n + b_n + c_n + d_n = 1$ より, $a_n + d_n = 1 - (b_n + c_n) = 1 - p_n$ であるから,

$$p_{n+1} = (1 - p_n) + \frac{8}{9}p_n = \underline{\underline{-\frac{1}{9}p_n + 1}} \cdots \textcircled{5}$$

$p_0 = b_0 + c_0 = 1$ より漸化式を解いて, $p_n = \underline{\underline{\frac{1}{10} \left\{ 9 + \left(-\frac{1}{9}\right)^n \right\}}}$

(3) ① - ④ より, $a_{n+1} - d_{n+1} = \frac{1}{9}(b_n - c_n)$

② - ③ より, $b_{n+1} - c_{n+1} = a_n - d_n$

この 2 式から, $b_{n+2} - c_{n+2} = \frac{1}{9}(b_n - c_n)$

よって, $q_n = b_n - c_n$ と定義すると, $q_{n+2} = \frac{1}{9}q_n$

$q_0 = b_0 - c_0 = 1$ より, n が偶数のとき, $q_n = \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$q_1 = b_1 - c_1 = 0$ より, n が奇数のとき, $q_n = 0$

$b_n = \frac{1}{2}(p_n + q_n)$ であるから,

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{2} \left\{ p_n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ \frac{1}{2}p_n & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

$n \geq 1$ に対して, ①を用いて,

$$E_n = 3a_n + 2b_n + c_n = 3 \cdot \frac{1}{9}b_{n-1} + b_n + (b_n + c_n) = \frac{1}{3}b_{n-1} + b_n + p_n$$

(i) n が偶数のとき,

$$E_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{2} \left\{ p_n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\} + p_n = \frac{1}{6}p_{n-1} + \frac{3}{2}p_n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

⑤を用いると,

$$E_n = \frac{1}{6}p_{n-1} + \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{9}p_{n-1} + 1\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}$$

(ii) n が奇数のとき,

$$E_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \left\{ p_{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\} + \frac{1}{2}p_n + p_n = \frac{1}{6}p_{n-1} + \frac{3}{2}p_n + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(i) と同様にして, $E_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}$

以上より, n の偶奇にかかわらず, $E_n = \underline{\underline{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}}}$

$$[\text{III}] \quad (1) \quad A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & b(a+c) \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & b(a^2+ac+c^2) \\ 0 & c^3 \end{pmatrix}$$

これらから、次のように推定できる。証明は帰納法による（省略）。

$$s_n = \underline{a^n}, \quad u_n = \underline{0}, \quad v_n = \underline{c^n}, \quad t_n = b(a^{n-1} + a^{n-2}c + a^{n-3}c^2 + \cdots + c^{n-1})$$

$$a = c \text{ のときは, } t_n = b \cdot na^{n-1} = \underline{n \times a^{n-1}b}$$

$$a \neq c \text{ のときは, } t_n = \underline{\frac{b(a^n - c^n)}{a - c}}$$

$$(2) \quad X^3 = \begin{pmatrix} x^3 & y(x^2+xz+z^2) \\ 0 & z^3 \end{pmatrix} \text{ より, } X^3 = A \text{ は次と同値.}$$

$$\begin{cases} x^3 = a \cdots \textcircled{1} \\ z^3 = c \cdots \textcircled{2} \\ y(x^2+xz+z^2) = b \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

任意の a, c に対して、①、②より、 $x = a^{\frac{1}{3}}, z = c^{\frac{1}{3}}$

$$\text{これと③とから, } y\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}} + c^{\frac{2}{3}}\right) = b$$

左辺のかっこの中を α とおくと、題意の X が

(i) 存在しない条件は、 $\alpha = 0$ かつ $b \neq 0$

(ii) 無数に存在する条件は、 $\alpha = 0$ かつ $b = 0$

(iii) ただ1つ存在する条件は、 $\alpha \neq 0$

さて、 $a = c$ ならば、 $\alpha = 3a^{\frac{2}{3}}$ であるから、 $\alpha = 0$ となる条件は $a = c = 0$

$$\text{また, } a \neq c \text{ ならば, } \alpha = \frac{a-c}{a^{\frac{1}{3}}-c^{\frac{1}{3}}} \neq 0$$

$$\text{よって, } \alpha = 0 \iff a = c = 0$$

よって、(i) は $a = c = 0$ かつ $b \neq 0$ で選択肢の (チ)、(ii) は $a = c = 0$ かつ $b = 0$ で選択肢の (ニ)、(iii) は $(a, c) \neq (0, 0)$ と同値な条件を選んで選択肢の (ロ) となる。

答は順番に、(チ), (ニ), (ロ)

$$(3) \quad f(X) = \begin{pmatrix} x^3+kx^2+lx+m & y\{(x^2+xz+z^2)+k(x+z)+l\} \\ 0 & z^3+kz^2+lz+m \end{pmatrix}$$

となるから、 $f(X) = A$ は次と同値。

$$\begin{cases} x^3+kx^2+lx+m = a \cdots \textcircled{4} \\ z^3+kz^2+lz+m = c \cdots \textcircled{5} \\ y\{(x^2+xz+z^2)+k(x+z)+l\} = b \cdots \textcircled{6} \end{cases}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2kx + l \text{ であり, } k^2 - 3l < 0 \text{ であるから, } f'(x) > 0$$

よって、 $f(x)$ は単調増加であるから、④すなわち $f(x) = a$ は任意の a に対してただ1つの実数解 x をもつ。

同様にして、任意の c に対して⑤を満たす実数 z がただ1つ存在する。

これらの実数 x, z に対して、④ - ⑤ より、

$$(x^3 - z^3) + k(x^2 - z^2) + l(x - z) = a - c$$

$$\therefore (x - z) \underbrace{\{(x^2 + xz + z^2) + k(x + z) + l\}}_{\beta} = a - c$$

が成り立つから、波下線の部分を β とおくと、 $a \neq c$ ならば $\beta \neq 0$

また、 $a = c$ ならば④、⑤および上で示した実数解の一意性より、 $x = z$ であり、 $\beta = 3x^2 + 2kx + l \neq 0$ ($\because k^2 - 3l < 0$)

いずれにしても $\beta \neq 0$ であるから、任意の実数 b に対して⑥を満たす実数 y がただ1つ存在する。

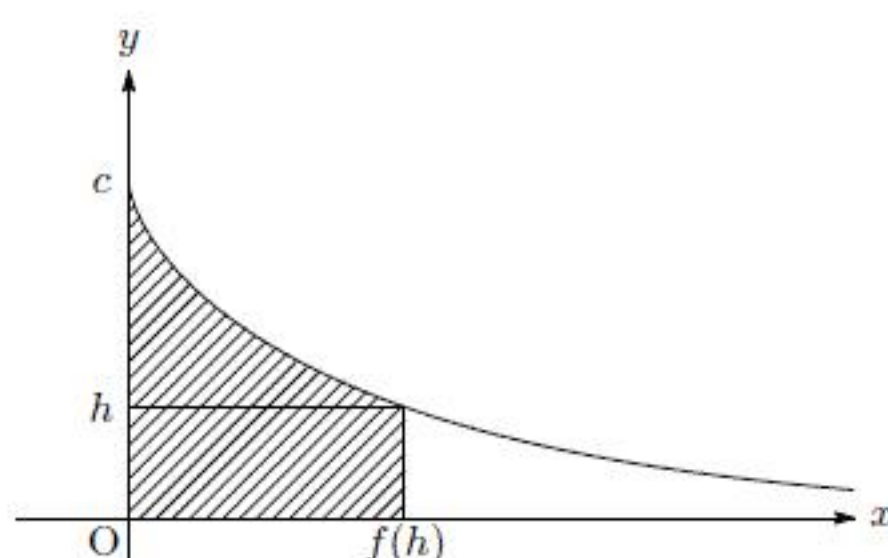
以上で題意は示された。□

$$[IV] \quad (1) \quad f(y) = c \left\{ \log \left(c + \sqrt{c^2 - y^2} \right) - \log y \right\} - \sqrt{c^2 - y^2}$$

$$0 < y < c \text{ に対して, } f'(y) = -\frac{\sqrt{c^2 - y^2}}{y}$$

$$f'(y) < 0 \text{ より } f(y) \text{ は単調減少. } \lim_{y \rightarrow +0} f(y) = \infty, \quad f(c) = 0$$

よって, 曲線 C の概形は次のようになる. (斜線部は (3) で用いる.)



$$(2) \quad 0 < y < c \text{ に対して, } \frac{dx}{dy} = -\frac{\sqrt{c^2 - y^2}}{y} \text{ より, } \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{c^2 - y^2}}$$

よって, $P(s, t)$ での接線 l_1 は,

$$y = -\frac{t}{\sqrt{c^2 - t^2}}(x - s) + t \quad \therefore a = \underline{\underline{\frac{-t}{\sqrt{c^2 - t^2}}}}$$

$$l_1 \text{ で } y = 0 \text{ として, } 0 = -\frac{t}{\sqrt{c^2 - t^2}}(x - s) + t$$

$$t \neq 0 \text{ に注意して, } x = s + \sqrt{c^2 - t^2} \quad (\text{A の } x \text{ 座標})$$

$$\text{よって, } PA^2 = \left(\sqrt{c^2 - t^2} \right)^2 + t^2 = c^2$$

$$c > 0 \text{ に注意して, } PA = \underline{\underline{c}}$$

(3) 題意の図形は上図の斜線部.

$$V(h) = \pi \int_0^{f(h)} y^2 dx$$

積分変数を y に置換すると,

$$dx = -\frac{\sqrt{c^2 - y^2}}{y} dy \qquad \begin{array}{c|c} x & 0 \longrightarrow f(h) \\ y & c \longrightarrow h \end{array}$$

のようになるから,

$$V(h) = \pi \int_c^h \left(-y \sqrt{c^2 - y^2} \right) dy = \pi \left[\frac{1}{3} (c^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_c^h = \frac{\pi}{3} (c^2 - h^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{よって, } \lim_{h \rightarrow +0} V(h) = \underline{\underline{\frac{\pi c^3}{3}}}$$

$$(4) \quad l_2 : y = \frac{\sqrt{c^2 - t^2}}{t}(x - s) + t \text{ より,}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\sqrt{c^2 - t^2}}{t} \\ \beta = -\frac{\sqrt{c^2 - t^2}}{t}s + t = -\alpha f(t) + t \end{cases}$$

よって,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{c^2 - t^2}} \times \left(-\frac{c^2}{t^2} \right)}}$$

また,

$$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{d\alpha}{dt} f(t) \underbrace{-\alpha f'(t) + 1}$$

波下線部を計算すると,

$$-\alpha f'(t) + 1 = -\frac{\sqrt{c^2 - t^2}}{t} \times \left(-\frac{\sqrt{c^2 - t^2}}{t} \right) + 1 = \frac{c^2 - t^2}{t^2} + 1 = \frac{c^2}{t^2}$$

となるから,

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{dt} &= -\frac{d\alpha}{dt} f(t) + \frac{c^2}{t^2} = \frac{d\alpha}{dt} \left(-f(t) - \sqrt{c^2 - t^2} \right) \\ &= \underline{\underline{\frac{d\alpha}{dt} \times \left(-c \log \frac{c + \sqrt{c^2 - t^2}}{t} \right)}} \end{aligned}$$

以下, t の関数 $g(t) = \alpha x + \beta$ ($0 < t < c$) を考える.

$$g'(t) = x \frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} \left(x - c \log \frac{c + \sqrt{c^2 - t^2}}{t} \right) \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで, $\frac{d\alpha}{dt} < 0$ であり, ①のかつこの中を t の関数とみて $h(t)$ とおくと,

$$h'(t) = \frac{c^2}{t \sqrt{c^2 - t^2}} > 0$$

より $h(t)$ は単調増加. これと $\lim_{t \rightarrow +0} h(t) = -\infty$, $h(c) = x > 0$ とから, $h(t) = 0$ を満たす t ($0 < t < c$) がただ 1 つ存在し, これを計算すると,

$$\log \frac{c + \sqrt{c^2 - t^2}}{t} = \frac{x}{c} \quad \dots \textcircled{2} \quad \therefore \frac{c + \sqrt{c^2 - t^2}}{t} = e^{\frac{x}{c}} (= M \text{ とおく})$$

$$\therefore \sqrt{c^2 - t^2} = Mt - c \quad \therefore c^2 - t^2 = M^2 t^2 - 2cMt + c^2$$

$$t \neq 0 \text{ に注意して, } t = \frac{2cM}{M^2 + 1} (= N \text{ とおく})$$

以上より, $g(t)$ の増減は下表のようになる.

t	0	$\dots$	N	$\dots$	c
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$		$\nearrow$	最大	$\searrow$	

よって, $g(t)$ を最大とする t は,

$$t = N = \frac{2cM}{M^2 + 1} = \frac{2c}{M + M^{-1}} = \underline{\underline{\frac{2c}{e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}}}}$$

このとき,

$$g(t) = \alpha x + \beta = \alpha x - \alpha f(t) + t = \alpha \{x - f(t)\} + t$$

②を用いて, $f(t) = x - \sqrt{c^2 - t^2}$ であるから,

$$g(t) = \frac{\sqrt{c^2 - t^2}}{t} \cdot \sqrt{c^2 - t^2} + t = \frac{c^2}{t} = \underline{\underline{\frac{c}{2} \left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right)}}$$

これが $g(t)$ の最大値である.