

[1]

(答)

(1)	(あ)	125
	(い)	166

(2)	(う)	-4
	(え)	-1
	(お)	$(-1)^n$
	(か)	$2(-1)^n$

(3)	(き)	2
	(く)	$\frac{1}{4}(e^2 - 7)$

(略解)

$$(1) \begin{cases} \text{偶数 2 枚, 奇数 1 枚} & {}_6C_2 \cdot {}_7C_1 = 15 \cdot 7 = 105 \\ \text{偶数 2 枚} & {}_6C_3 = 20 \end{cases} \quad \therefore 105 + 20 = \underline{125}$$

$$11 \text{ 以上少なくとも 1 枚含まれるのは, } {}_{13}C_3 - {}_{10}C_3 = 286 - 120 = \underline{166}$$

$$(2) \quad x^2 + a_1x + b_1 = 0 \text{ の解は, } \alpha = 2 + \sqrt{5}, \beta = 2 - \sqrt{5} \text{ となる. } \alpha + \beta = 4, \alpha\beta = -1$$

$$\therefore \underline{a_1 = -4}, \underline{b_1 = -1}$$

$$x^2 + a_nx + b_n = 0 \text{ の解は, } \alpha^n, \beta^n \text{ であり, } \alpha^n\beta^n = (\alpha\beta)^n = (-1)^n \quad \therefore \underline{b_n = (-1)^n}$$

$$\text{解と係数の関係より, } \alpha^n + \beta^n = -a_n, \alpha^n\beta^n = b_n$$

$$a_n^2 = (\alpha^n + \beta^n)^2 = \alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2(\alpha\beta)^n, \quad a_{2n} = -(\alpha^{2n} + \beta^{2n})$$

$$\therefore \underline{a_n^2 + a_{2n} = 2(\alpha\beta)^n = 2(-1)^n}$$

$$(3) \quad A(m) = \int_0^1 x(e^{2x} - 2me^x + m^2)dx = \int_0^1 x \left(\frac{1}{2}e^{2x} - 2me^x + m^2x \right)' dx$$

$$= \left[x \left(\frac{1}{2}e^{2x} - 2me^x + m^2x \right) \right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{1}{2}e^{2x} - 2me^x + m^2x \right) dx$$

$$= m^2 - 2em + \frac{1}{2}e^2 - \left[\frac{1}{4}e^{2x} - 2me^x + \frac{1}{2}m^2x^2 \right]_0^1$$

$$= m^2 - 2em + \frac{1}{2}e^2 - \left(\frac{1}{2}m^2 - 2em + \frac{1}{4}e^2 \right) + \left(\frac{1}{4} - 2m \right)$$

$$= \frac{1}{2}m^2 - 2m + \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}(m-2)^2 + \frac{1}{4}(e^2 - 7)$$

$$A(m) \text{ は } m = \underline{2} \text{ のとき, 最小値 } \underline{\frac{1}{4}(e^2 - 7)} \text{ をとる.}$$

(答)

	(あ)	$\left(\frac{3}{4}\right)^n$		(え)	$\frac{3}{64}$
(1)	(い)	$\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$	(3-1)	(お)	$\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^n$
(2)	(う)	$\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$	(3-2)	(か)	$\frac{3}{4}$
				(き)	$\left(\frac{3}{4}\right)^n$

(略解)

(1) $p_0=1, p_1=\frac{3}{4}, q_1=\frac{1}{4}$

n 回実行して、点 A が 1 に置かれるのは、 n 回とも 1 に置かれるときで、 $p_n=\underline{\left(\frac{3}{4}\right)^n}$

q_{n+1}, q_n の関係は、

n 回目 1 にいて、次の回 2 に移動 $\cdots \frac{1}{4}p_n$

n 回目 2 にいて、次の回 2 にとどまる $\cdots \frac{3}{4}q_n$

n 回目 3 にいて、次の回 2 に移動 $\cdots \frac{1}{4}(1-p_n-q_n)$

これより、 $q_{n+1}=\frac{1}{4}p_n+\frac{3}{4}q_n+\frac{1}{4}(1-p_n-q_n)=\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{4}$

$q_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(q_n-\frac{1}{2}\right)$ から $q_n-\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(q_1-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\therefore q_n=\underline{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}$

(2) 点 B が 2 からスタートすることで、 n 回実行して点 B は 2 または 3 の位置にいる。

q'_{n+1}, q'_n の関係は、 $q'_0=1, q'_1=\frac{3}{4}$

n 回目 2 にいて、次の回 2 にとどまる $\cdots \frac{3}{4}q'_n$

n 回目 3 にいて、次の回 2 に移動 $\cdots \frac{1}{4}(1-q'_n)$

これより、 $q'_{n+1}=\frac{3}{4}q'_n+\frac{1}{4}(1-q'_n), q'_{n+1}=\frac{1}{2}q'_n+\frac{1}{4}$

$q'_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(q'_n-\frac{1}{2}\right)$ から $q'_n-\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(q'_1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\therefore q'_n=\underline{\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}$

(3) (3-1) r_2 は 2 回繰り返し、2 点 C、D が 1 からスタートしともに 2 にあるときで、

C が 1 回目 2 に移動し、2 回目 2 にとどまる $\cdots \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}$

このとき、D は 2 回目 2 に移動する $\cdots \frac{1}{4}$ $\therefore r_2=\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{4}=\frac{3}{64}$

$n \geq 2$ のとき、

・C が k 回目に初めて、2 に移動し $\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{4}\right\}$ 、 $k+1$ 回目 2 からスタートし、

n 回目まで $n-k$ 回で 2 にいる (q'_{n-k}) 確率が

$\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} q'_{n-k}=\frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \cdot\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\right\} \quad (1 \leq k \leq n-1)$

・D は $k+1$ 回目 1 からスタートし、 n 回目まで $n-k$ 回で 2 にいる確率が

$q_{n-k}=\frac{1}{2} \cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\right\} \quad (1 \leq k \leq n-1)$

このとき、2 点 C、D がともに 2 に置かれている確率 r_n は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} q'_{n-k} \cdot q_{n-k} &= \frac{1}{16}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \cdot\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\right\} \cdot\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\right\} \\ &= \frac{1}{16}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \cdot\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}\right\} = \frac{1}{16}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \cdot\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{-(k-1)}\right\} \\ &= \frac{1}{16}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}-\frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot 3^{k-1} \end{aligned}$$

$k=1, 2, \cdots, n-1$ を代入して、辺々をたすと、

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{1}{16} \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}-\frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1} \\ &= \frac{1}{16} \cdot \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{1-\frac{3}{4}}-\frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{3^{n-1}-1}{3-1} \\ &= \frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-\frac{1}{32}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(3^{n-1}-1\right)=\frac{1}{4}-\frac{9}{32}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}+\frac{1}{32}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ &= \underline{\frac{1}{4}-\frac{3}{8}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^n} \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

(3-2) s_1 は 1 回の試行で、C、D がともに 2 の位置に置かれていない状態で、

それは C が 1 回目に 1 にいて $\left(\frac{3}{4}\right)$ 、D が 1 回目に必ず 1 にいるので、

$s_1=\frac{3}{4} \cdot 1=\frac{3}{4}$

点 C が 1 にいて n 回目 2 にいる確率を c_n 、点 D が 1 にいて n 回目 2 にいる確率を d_n とすると、

$s_n+\left(c_n+d_n-r_n\right)=1$ となる。 $s_n-r_n=1-\left(c_n+d_n\right)$

$c_n=q_n=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$

d_n は C が k 回目に 1 を離れて、D が $k+1$ 回目から n 回まで 1 から 2 に移動する確率を考えて、

$$\begin{aligned} d_n &= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{4} \cdot q_{n-k} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\right] \\ &= \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}-\frac{1}{8} \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{-(k-1)} \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}}{1-\frac{3}{4}}-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{3}{2}-1} \\ &= \frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right]-\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}-\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

$\therefore s_n-r_n=1-\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=\underline{\left(\frac{3}{4}\right)^n}$

【Ⅲ】

(答)

(1)	(あ)	$X - \sqrt{X^2 - 2Y + 1}$	(2)	(う, え)	$(-2XY + X, 2X^2 - Y + 2)$
	(い)	$X + \sqrt{X^2 - 2Y + 1}$			
(3) (i)			(お)	$y = 0$	
(4)			(か)	$y = 2x^2 + 2$	

(略解)

(1) C 上の点 $\left(t, \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\right)$ における接線 $y = tx - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}$ が点 P(X, Y) 通る関係式は,

$$Y = tX - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2} \iff t^2 - 2Xt + 2Y - 1 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

上式の判別式を D とすると, $\frac{D}{4} = X^2 - 2Y + 1 > 0 \quad \left(Y < \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2} \text{ より}\right)$

①は異なる 2 実数解をもち, 2 解を t_1, t_2 ($t_1 < t_2$) とすると,

$$t = X \pm \sqrt{X^2 - 2Y + 1} \quad \therefore m_1 = t_1 = \underline{X - \sqrt{X^2 - 2Y + 1}}, m_2 = t_2 = \underline{X + \sqrt{X^2 - 2Y + 1}}$$

(2) (1)の①式で, 解と係数の関係より, $t_1 + t_2 = 2X, t_1 t_2 = 2Y - 1$

$x = t_1, t_2$ における法線の傾きは, それぞれ $-\frac{1}{t_1}, -\frac{1}{t_2}$ となるから,

$$L_1: y = -\frac{1}{t_1}x + \frac{1}{2}t_1^2 + \frac{3}{2}, L_2: y = -\frac{1}{t_2}x + \frac{1}{2}t_2^2 + \frac{3}{2}$$

交点 R の x 座標は, $-\frac{1}{t_1}x + \frac{1}{2}t_1^2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{t_2}x + \frac{1}{2}t_2^2 + \frac{3}{2} \iff \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right)x = \frac{1}{2}(t_1^2 - t_2^2)$

$$x = -\frac{1}{2}t_1 t_2 (t_1 + t_2) = \underline{-X(2Y - 1)}$$

$$y = \frac{1}{2}t_2(t_1 + t_2) + \frac{1}{2}t_1^2 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\{(t_1 + t_2)^2 - t_1 t_2 + 3\} = \underline{2X^2 - Y + 2}$$

(3) (i) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ のとき, 2 直線 l_1, l_2 が直交することから, $m_1 \cdot m_2 = t_1 \cdot t_2 = -1$

$t_1 t_2 = 2Y - 1$ より $-1 = 2Y - 1 \quad \therefore Y = 0$ (P は C の準線上を動く) $\therefore \underline{y = 0}$

(ii) l_1, l_2 と x 軸の正の方向とのなす角をそれぞれ θ_1, θ_2 とすると, $\alpha = \theta_1 - \theta_2$

$$\tan \alpha = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2} = \frac{t_1 - t_2}{1 + t_1 t_2}$$

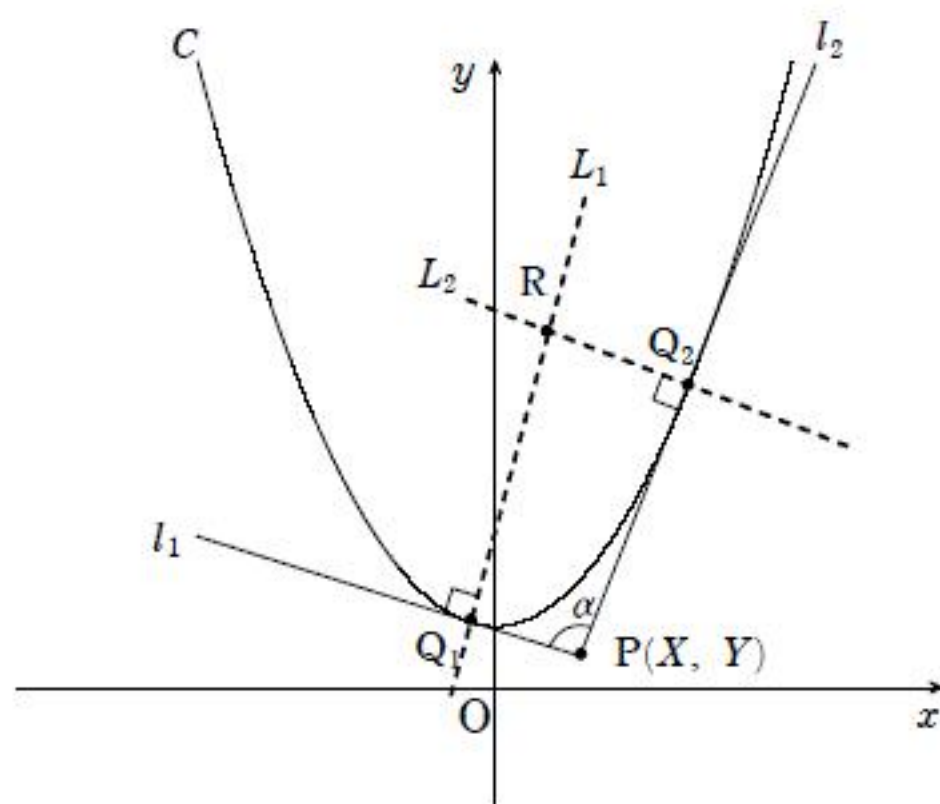
$$\tan^2 \alpha = \left(\frac{t_1 - t_2}{1 + t_1 t_2}\right)^2 = \frac{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2}{(1 + t_1 t_2)^2} = \frac{4X^2 - 4(2Y - 1)}{4Y^2}$$

$$\iff \tan^2 \alpha = \frac{X^2 - (2Y - 1)}{Y^2} \iff X^2 - 2Y + 1 = \tan^2 \alpha Y^2$$

$$\underline{X^2 - (\tan^2 \alpha)Y^2 - 2Y + 1 = 0 \quad \left(Y < \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}\right)}$$

(4) (2)より R($-2XY + X, 2X^2 - Y + 2$)

$$S\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ は } Y = 0 \text{ より } R(x, y) = (X, 2X^2 + 2) \quad \therefore \underline{y = 2x^2 + 2}$$



[IV]

(答)

(1)	(あ)	$\frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + \sin \theta}$
	(い)	$\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$
(2)	(う)	$\frac{\sin \theta \cos \theta (1 - \sin \theta)^{n-1}}{1 + \sin \theta}$

(3)	(え)	$x^2 + (2n - 1)x - 1$
	(お)	$\frac{\sqrt{4n^2 - 4n + 5} - (2n - 1)}{2}$
(4)	(か)	$\frac{1}{2}$
	(き)	$\frac{\pi}{4e^2}$

(略解)

(1) BC の中点を H とすると, $AH = \cos \theta$, $BC = 2 \sin \theta$

$\triangle ABC$ の面積を S とすると, $S = \sin \theta \cos \theta$

一方, S を内接円の半径 $R_1(\theta)$ で表すと,

$$S = \frac{1}{2} R_1(\theta)(2 + 2 \sin \theta) = R_1(\theta)(1 + \sin \theta) \quad \therefore R_1(\theta) = \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + \sin \theta}$$

$$\begin{aligned} R_1'(\theta) &= \frac{(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)(1 + \sin \theta) - \sin \theta \cos \theta (\cos \theta)}{(1 + \sin \theta)^2} = \frac{-\sin^3 \theta - 2 \sin^2 \theta + 1}{(1 + \sin \theta)^2} \\ &= \frac{-(1 + \sin \theta)(\sin^2 \theta + \sin \theta - 1)}{(1 + \sin \theta)^2} \end{aligned}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ で } R_1'(\theta) = 0 \text{ となる } \theta \text{ は } \sin^2 \theta + \sin \theta - 1 = 0 \text{ から } \sin \theta = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

$$\text{となる } \theta \text{ でこのとき } R_1(\theta) \text{ が最大になる. } \sin \theta_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \sin^k \theta_1$ は初項 $\sin \theta_1$, 公比 $\sin \theta_1$ の無限等比級数で, $0 < \sin \theta < 1$ より収束し,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin^k \theta_1 = \frac{\sin \theta_1}{1 - \sin \theta_1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{3 - \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

(2) 2 円 c_n, c_{n+1} の中心の作る右図の直角三角形で,

$$R_n(\theta) - R_{n+1}(\theta) = \{R_n(\theta) + R_{n+1}(\theta)\} \sin \theta$$

$$R_{n+1}(\theta) = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} R_n(\theta)$$

$$\therefore R_n(\theta) = \left(\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} \right)^n \cdot R_1(\theta) = \frac{\sin \theta \cos \theta (1 - \sin \theta)^{n-1}}{1 + \sin \theta}$$

$$(3) R_n(\theta) = \frac{\sin \theta \cos \theta (1 - \sin \theta)^{n-1}}{1 + \sin \theta}$$

$$\log R_n(\theta) = \log \sin \theta + \log \cos \theta + (n - 1) \log (1 - \sin \theta) - n \log (1 + \sin \theta)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \log R_n(\theta) &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \frac{(n - 1) \cos \theta}{1 - \sin \theta} - \frac{n \cos \theta}{1 + \sin \theta} \\ &= \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} - \frac{(2n - 1) \cos \theta - \sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{\cos^3 \theta - \sin^2 \theta \cos \theta - (2n - 1) \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta \cos \theta}{\sin \theta \cos^2 \theta} = \frac{-\sin^2 \theta - (2n - 1) \sin \theta + 1}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= -\frac{\sin^2 \theta + (2n - 1) \sin \theta - 1}{\sin \theta \cos \theta} \quad \therefore g_n(x) = \underline{x^2 + (2n - 1)x - 1} \end{aligned}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ で } \frac{d}{dx} \log R_n(\theta) = 0 \text{ となる } \theta \text{ は } \sin^2 \theta + (2n - 1) \sin \theta - 1 = 0 \text{ となる } \theta \text{ で,}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{4n^2 - 4n + 5} - (2n - 1)}{2}$$

$$\text{この } \theta \text{ で } R_n(\theta) \text{ は最大となり, } \sin \theta_n = \frac{\sqrt{4n^2 - 4n + 5} - (2n - 1)}{2}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \theta_n = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{\sqrt{4n^2 - 4n + 5} - (2n - 1)} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{4 - \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}} + 2 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

次に円 c_n の面積 S_n は $S_n = \pi R_n^2(\theta_n)$ であるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 S_n = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \{n R_n(\theta_n)\}^2$$

ここで, $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \theta_n = \frac{1}{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \theta_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \theta_n = 1$ に注意して,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n R_n(\theta_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n \sin \theta_n \cos \theta_n}{1 - \sin \theta_n} \right) \left(\frac{1 - \sin \theta_n}{1 + \sin \theta_n} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n \sin \theta_n \cos \theta_n}{1 - \sin \theta_n} \right) \left(\frac{2n + 1 - \sqrt{4n^2 - 4n + 5}}{\sqrt{4n^2 - 4n + 5} - (2n - 3)} \right)^n \end{aligned}$$

$$\frac{2n + 1 - \sqrt{4n^2 - 4n + 5}}{\sqrt{4n^2 - 4n + 5} - (2n - 3)} = \frac{2n - 3 + \sqrt{4n^2 - 4n + 5}}{2n + 1 + \sqrt{4n^2 - 4n + 5}} = 1 - \frac{4}{2n + 1 + \sqrt{4n^2 - 4n + 5}}$$

と変形でき,

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{2n + 1 + \sqrt{4n^2 - 4n + 5}} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{2n + 1 + \sqrt{4n^2 - 4n + 5}} \right)^{\frac{2n + 1 + \sqrt{4n^2 - 4n + 5}}{4} \cdot \frac{-4n}{\frac{2n + 1 + \sqrt{4n^2 - 4n + 5}}{4} - 1}} \\ &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 S_n = \pi \lim_{n \rightarrow \infty} \{n R_n(\theta_n)\}^2 = \pi \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e} \right)^2 = \frac{\pi}{4e^2}$$

