

【11】

- (1)(i) 9人から2人部屋に入る2人を選び、
残った7人から3人部屋に入る3人を選び、
残った4人が4人部屋に入ると考えて

$${}_9C_2 \times {}_7C_3 \times {}_4C_4 = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} \times \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times 1 = \boxed{1260}^{(あ)}$$

次に、教員2人が異なる部屋となる場合について、余事象を考える。

2人の教員が同部屋のとき、残りの7人の学生の割り当て方は次の通り。

2人部屋	3人部屋	4人部屋	
0人	3人	4人	 ${}_7C_3 \times {}_4C_4 = 35$
2人	1人	4人	 ${}_7C_2 \times {}_5C_1 \times {}_4C_4 = 105$
2人	3人	2人	 ${}_7C_2 \times {}_5C_3 \times {}_2C_2 = 210$

よって、求める場合の数は

$$1260 - (35 + 105 + 210) = 1260 - 350$$

$$= \boxed{910}^{(い)}$$

- (ii) 学生7人と教員2人の計9人を割り当ててから、教員2人を除外する。

教員2人が同部屋のとき、350通り

教員2人が異なる部屋のとき、910通り

であるから、除外される教員の区別を考慮すれば

求める場合の数は、

$$350 + 910 \div 2 = \boxed{805}^{(う)}$$

- (2)(i) $c=222$ のとき

$$13x + 11y = 222$$

$$11(x + y) + 2x = 222$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x = 111 \end{cases} \quad \text{のとき、成立する。}$$

よって、この不定方程式の特殊解は、

$$x = 111, y = -111$$

$$13x + 11y = 222 \quad \text{.....①}$$

$$13(111) + 11(-111) = 222 \quad \text{.....②}$$

①-②より

$$13(x - 111) + 11(y + 111) = 0$$

$$13(x - 111) = -11(y + 111)$$

x, y は整数より、

$$\begin{cases} x - 111 = -11k \\ y + 111 = 13k \end{cases} \quad (k \text{ は整数})$$

これより、この方程式の一般解は

$$\begin{cases} x = 111 - 11k \\ y = -111 + 13k \end{cases}$$

$$x > 0, y > 0 \text{ より } \frac{111}{13} < k < \frac{111}{11}$$

$$8 + \frac{7}{13} < k < 10 + \frac{1}{11}$$

k は整数より、 $k = 9, 10$

$k = 9$ のとき、 $x = 12, y = 6$

$k = 10$ のとき、 $x = 1, y = 19$ となり2組存在し、不適

- (ii) $c=223$ のとき

同様に、特殊解は $x = -4, y = 25$

このとき、一般解は

$$\begin{cases} x = -4 - 11k \\ y = 25 + 13k \end{cases} \quad (k \text{ は整数})$$

$$x > 0, y > 0 \text{ より } -\frac{25}{13} < k < -\frac{4}{11}$$

k は整数より、 $k = -1$

このとき、 $x = 7, y = 12$ となり、条件を満たす。

- (iii) $c=224$ のとき

同様に、特殊解は $x = 112, y = -112$

このときの一般解は

$$\begin{cases} x = 112 - 11k \\ y = -112 + 13k \end{cases} \quad (k \text{ は整数})$$

$$x > 0, y > 0 \text{ より } \frac{112}{13} < k < \frac{112}{11}$$

k は整数より $k = 9, 10$

$k = 9$ のとき、 $x = 13, y = 5$

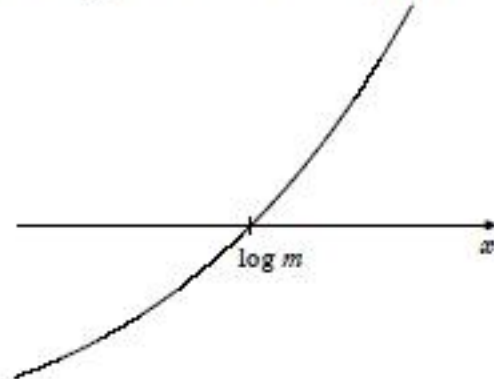
$k = 10$ のとき、 $x = 2, y = 18$

となり2組存在し、不適。

$$\text{以上より、} c = \boxed{223}^{(き)} \text{ のとき } x = \boxed{7}^{(け)}, y = \boxed{12}^{(か)}$$

$$(3) f(m) = \int_0^1 |e^x - m| e^x dx$$

$y = (e^x - m)e^x$ のグラフの概形は

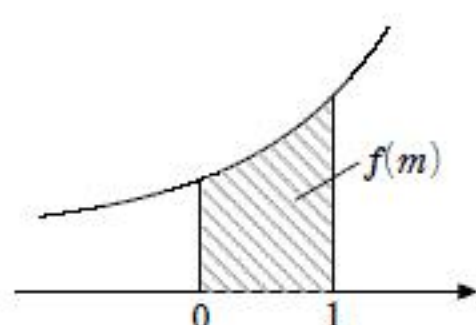
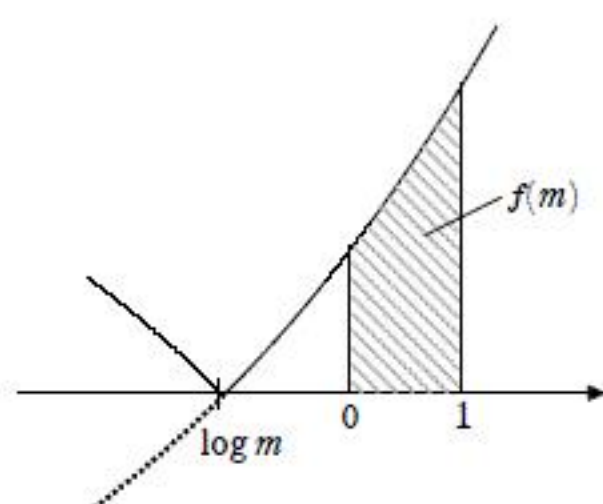


であり、これを区間 $[0, 1]$ で積分するので、次の3通りに場合分けできる。

- (i) $\log m < 0$ 、すなわち $m < 1$ のとき

$$0 < m < 1$$

$$m \leq 0$$

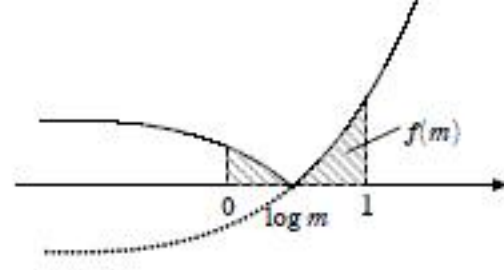


いずれの場合も $f(m)$ は次の式で表せる。

$$\begin{aligned} f(m) &= \int_0^1 (e^x - m)e^x dx \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{2x} - m e^x \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} e^2 - m e - \frac{1}{2} + m \\ &= -(e-1)m + \frac{1}{2}(e^2 - 1) \end{aligned}$$

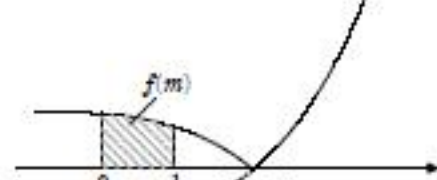
- (ii) $0 \leq \log m < 1$ すなわち $1 \leq m < e$ のとき

$$\begin{aligned} f(m) &= \int_0^{\log m} \{-(e^x - m)e^x\} dx + \int_{\log m}^1 (e^x - m)e^x dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} e^{2x} + m e^x \right]_0^{\log m} + \left[\frac{1}{2} e^{2x} - m e^x \right]_{\log m}^1 \\ &= -\frac{1}{2} m^2 + m^2 + \frac{1}{2} - m + \frac{1}{2} e^2 - m e - \frac{1}{2} m^2 + m^2 \\ &= m^2 - (e+1)m + \frac{1}{2}(e^2 + 1) \\ &= \left(m - \frac{e+1}{2} \right)^2 - \left(\frac{e+1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}(e^2 + 1) \\ &= \left(m - \frac{e+1}{2} \right)^2 + \frac{(e-1)^2}{4} \end{aligned}$$



- (iii) $1 \leq \log m$ すなわち $e \leq m$ のとき

$$\begin{aligned} f(m) &= \int_0^1 \{-(e^x - m)e^x\} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{2x} + m e^x \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2} e^2 + m e + \frac{1}{2} - m = (e-1)m - \frac{1}{2}(e^2 - 1) \end{aligned}$$



$$\text{以上より、} f(m) = \begin{cases} -(e-1)m + \frac{1}{2}(e^2 - 1) & (m < 1) \\ \left(m - \frac{e+1}{2} \right)^2 + \frac{(e-1)^2}{4} & (1 \leq m < e) \\ (e-1)m - \frac{1}{2}(e^2 - 1) & (e \leq m) \end{cases}$$

$f(m)$ のグラフの概形は右図のようになり、最小値は

$$m = \boxed{\frac{e+1}{2}}^{(き)} \text{ のとき } \boxed{\frac{(e-1)^2}{4}}^{(け)} \text{ をとる。}$$



〔Ⅱ〕
 (右図のような状態図を用いて、この操作の流れを理解する)

(1) 漸化式を立てれば

$$\begin{cases} a_n = \overset{(あ)}{\boxed{\frac{1}{2}}} a_{n-1} + \overset{(い)}{\boxed{\frac{1}{2}}} c_{n-1} & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ b_n = \overset{(う)}{\boxed{\frac{1}{2}}} a_{n-1} + \overset{(え)}{\boxed{\frac{1}{2}}} b_{n-1} & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ c_n = \overset{(お)}{\boxed{\frac{1}{2}}} b_{n-1} + \overset{(か)}{\boxed{0}} c_{n-1} & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

また、
 $a_n + b_n + c_n = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$

(2) ①, ④より

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} a_{n-1} + (1 - a_{n-1} - b_{n-1}) \\ \therefore b_{n-1} &= 1 - \frac{1}{2} a_{n-1} - a_n \quad \cdots \cdots \textcircled{5} \end{aligned}$$

②へ代入すると

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} a_n - a_{n+1} &= \frac{1}{2} a_{n-1} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} a_{n-1} - a_n \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} a_{n-1} - \frac{1}{2} a_n \\ \therefore a_{n+1} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} a_{n-1} \end{aligned}$$

これを变形すれば

$$a_{n+1} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{4} \left(a_{n-1} - \frac{2}{5} \right)$$

となり、数列 $\left\{ a_n - \frac{2}{5} \right\}$ について

$$\begin{array}{ccccccc} & & \times \left(-\frac{1}{4} \right) & & \times \left(-\frac{1}{4} \right) & & \\ & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\ a_0 - \frac{2}{5} & & a_1 - \frac{2}{5} & & a_2 - \frac{2}{5} & & a_3 - \frac{2}{5} & & a_4 - \frac{2}{5} \\ & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \\ & \times \left(-\frac{1}{4} \right) & & \times \left(-\frac{1}{4} \right) & & \times \left(-\frac{1}{4} \right) & & \end{array}$$

$$\begin{cases} a_{2m-1} - \frac{2}{5} = \left(a_1 - \frac{2}{5} \right) \times \left(-\frac{1}{4} \right)^{m-1} \\ a_{2m} - \frac{2}{5} = \left(a_0 - \frac{2}{5} \right) \times \left(-\frac{1}{4} \right)^m \end{cases}$$

$a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{2}$ に注意して整えれば

$$\begin{cases} a_{2m-1} = \overset{(き)}{\boxed{\frac{2}{5} + \frac{1}{10} \left(-\frac{1}{4} \right)^{m-1}}} \\ a_{2m} = \overset{(け)}{\boxed{\frac{2}{5} + \frac{3}{5} \left(-\frac{1}{4} \right)^m}} \end{cases}$$

検算

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{2}{5} + \frac{1}{10} \left(-\frac{1}{4} \right)^1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{40} = \frac{3}{8} \cdots \cdots \text{ok} \\ a_4 &= \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \left(-\frac{1}{4} \right)^2 = \frac{2}{5} + \frac{3}{80} = \frac{7}{16} \cdots \cdots \text{ok} \end{aligned}$$

⑤より、

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= 1 - \frac{1}{2} a_{n-1} - a_n \\ \therefore b_n &= 1 - \frac{1}{2} a_n - a_{n+1} \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} b_{2m} &= 1 - \frac{1}{2} a_{2m} - a_{2m+1} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5} \left(-\frac{1}{4} \right)^m \right) - \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{10} \left(-\frac{1}{4} \right)^{m+1} \right) \\ &= \frac{2}{5} \left(1 - \left(-\frac{1}{4} \right)^m \right) \\ b_{2m-1} &= 1 - \frac{1}{2} a_{2m-1} - a_{2m} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{10} \left(-\frac{1}{4} \right)^{m-1} \right) - \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5} \left(-\frac{1}{4} \right)^m \right) \\ &= \frac{2}{5} \left(1 - \left(-\frac{1}{4} \right)^m \right) \end{aligned}$$

以上より、

$$b_{2m-1} = b_{2m} = \overset{(<), (>)}{\boxed{\frac{2}{5} \left(1 - \left(-\frac{1}{4} \right)^m \right)}}$$

検算

$$b_3 = b_4 = \frac{2}{5} \left(1 - \left(-\frac{1}{4} \right)^2 \right) = \frac{3}{8} \cdots \cdots \text{ok}$$

(3) n 回目で初めて C に到達するためには

$n-1$ 回目までに B に到達していて、 n 回目で C に淘汰する。

$n-1$ 回目までに B に到達している確率は

1 回 $\sim n-1$ 回目までのどこかで $A \rightarrow B$ となり、

それ以前は $A \rightarrow A$ 、それ以降は $B \rightarrow B$ となり続けるので

$$\begin{array}{ccc} {}^{n-1}C_1 \left(\frac{1}{2} \right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2} = \frac{n-1}{2^{n-1}} \\ \uparrow \qquad \qquad \uparrow \\ A \rightarrow B \qquad A \rightarrow A, B \rightarrow B \\ \text{の確率} \qquad \text{の確率} \end{array}$$

よって、求める確率 d_n は

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{n-1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{2} = \overset{(&grr;)}{\boxed{\frac{n-1}{2^n}}} \\ &\qquad \qquad \qquad \uparrow \\ &\qquad \qquad \qquad B \rightarrow C \\ &\qquad \qquad \qquad \text{の確率} \end{aligned}$$

検算

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{2-1}{2^2} = \frac{1}{4} \cdots \cdots \text{ok} \\ d_4 &= \frac{4-1}{2^4} = \frac{3}{16} \cdots \cdots \text{ok} \end{aligned}$$

(4) k 回目に初めて C に置かれ、その後 A にいる確率は

$$d_n \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n-k-1}$$

k 回目に初めて C に置かれ、その後 A を経由し、B にいる確率は

$$\begin{aligned} d_k \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n-k-1} \times {}^{n-k-1}C_1 \\ \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ \qquad \qquad \qquad \text{どこかで 1 回 } A \rightarrow B \text{ となるので} \\ \qquad \qquad \qquad \text{その回の選び方} \end{aligned}$$

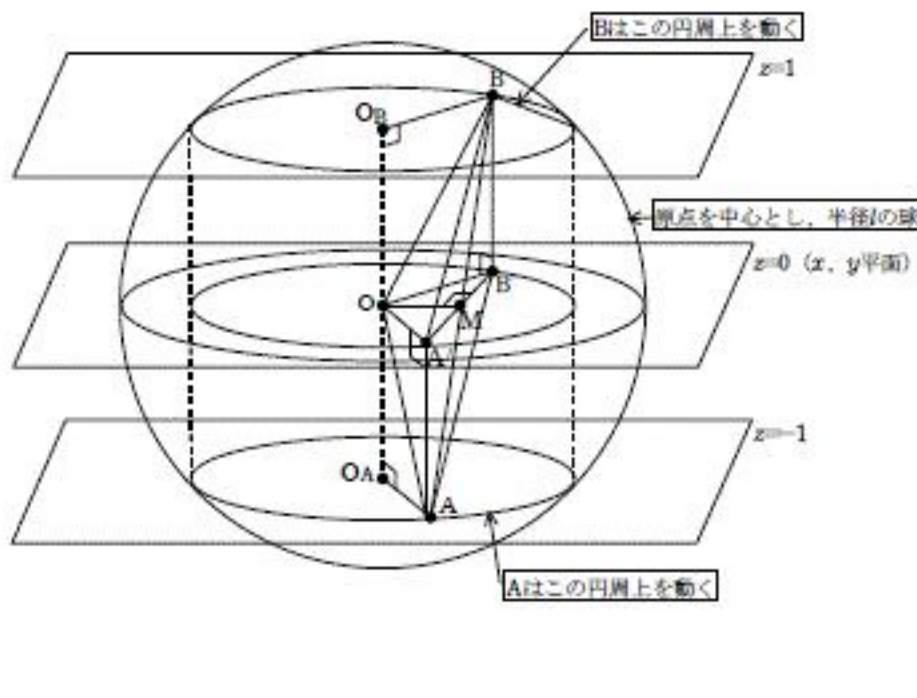
よって、 k 回目に初めて C に置かれ、その後 A か B にいる確率は

$$\begin{aligned} d_k \times \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^{n-k-1} \times (n-k) \right\} &= \frac{k-1}{2^k} \times \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^{n-k-1} \times (n-k) \right\} \\ &= \frac{(k-1)(n-k)}{2^{n-1}} \\ &= \frac{-k^2 + (n+1)k - n}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

$1 \leq k \leq n-1$ であるから、求める確率は

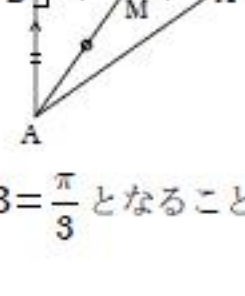
$$\begin{aligned} e_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{-k^2 + (n+1)k - n}{2^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \left\{ -\frac{1}{6} n(n-1)(2n-1) + (n+1) \cdot \frac{1}{2} n(n-1) - n \cdot (n-1) \right\} \\ &= \frac{n(n-1)}{2^{n-1}} \cdot \left\{ -\frac{1}{6} (2n-1) + \frac{1}{2} (n+1) - 1 \right\} \\ &= \frac{n(n-1)}{2^{n-1}} \cdot \frac{n-2}{6} \\ &= \overset{(&grr;)}{\boxed{\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2^n}}} \end{aligned}$$

【Ⅲ】



(1) $AA' \parallel BB'$ かつ $AA' = BB'$ より、四角形 $AA'B'B'$ は平行四辺形である。

その対角線は互いに中点で交わることから、 $AM = BM$, $AM = B'M$



いま $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ となることから、三角形 OAB は正三角形

よって、 $AB = l$ となり、 $MB = \frac{l}{2}$

これをみたすためには $\frac{l}{2} \geq 1$ であることが必要十分 (三角形の成立条件)

$$\therefore l \geq \underline{\underline{2}} \quad (\text{あ})$$

ここで、それぞれの点を座標で表すと、実数を α, β 用いて

$$\begin{aligned} A(\sqrt{t^2-1}\cos\alpha, \sqrt{t^2-1}\sin\alpha, -1) & \quad B(\sqrt{t^2-1}\cos\beta, \sqrt{t^2-1}\sin\beta, 1) \\ A(\sqrt{t^2-1}\cos\alpha, \sqrt{t^2-1}\sin\alpha, 0) & \quad B'(\sqrt{t^2-1}\cos\beta, \sqrt{t^2-1}\sin\beta, 0) \end{aligned}$$

$$\text{図より } O_B B = \sqrt{t^2-1}$$

$$\text{同様に } O_A A = \sqrt{t^2-1}$$

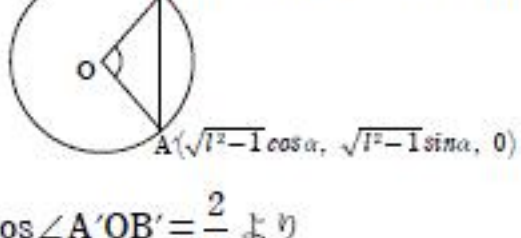
これよりの AB の長さについて、三平方の定理より

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(\sqrt{t^2-1}\cos\alpha - \sqrt{t^2-1}\cos\beta)^2 + (\sqrt{t^2-1}\sin\alpha - \sqrt{t^2-1}\sin\beta)^2 + (-1-1)^2} \\ &= \sqrt{(t^2-1)(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (t^2-1)(\sin\alpha - \sin\beta)^2 + 4} \\ &= \sqrt{(t^2-1)(2-2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)) + 4} \\ &= \sqrt{2t^2 + 2 - 2(t^2-1)\cos(\alpha-\beta)} \end{aligned}$$

$\triangle OAB$ は正三角形より

$$l = \sqrt{2t^2 + 2 - 2(t^2-1)\cos(\alpha-\beta)} \quad \dots\dots ①$$

また、条件 $\triangle OA'B'$ に着目すると



条件 $\cos\angle A'OB' = \frac{2}{3}$ より

$$\cos\{\pm(\alpha-\beta)\} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \cos(\alpha-\beta) = \frac{2}{3} \quad \dots\dots ②$$

①, ②より

$$l = \sqrt{2t^2 + 2 - 2(t^2-1) \cdot \frac{2}{3}}$$

両辺を2乗して

$$l^2 = 2t^2 + 2 - \frac{4}{3}(t^2-1)$$

$$= \frac{2}{3}t^2 + \frac{10}{3}$$

$$\frac{1}{3}l^2 = \frac{10}{3}$$

$$l > 0 \text{ より } l = \underline{\underline{\sqrt{10}}} \quad (\text{い})$$

(2) $l = \sqrt{10}$ のとき、 $\sqrt{t^2-1} = 3$

条件より、 A の x 座標が0

すなわち $\cos\alpha = 0 \therefore \alpha = \frac{\pi}{2}$

よって、 $A(0, \underline{\underline{3}}, -1)$ (う)

また、 $\cos(\alpha-\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \sin\beta = \frac{2}{3}$ より、 $\cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ($\because$ (え) は正より)

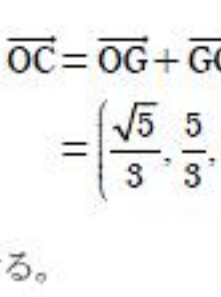
よって、 $B(\underline{\underline{\sqrt{5}}}, \underline{\underline{2}}, -1)$ (き)

これより、 $\triangle OAB$ の重心 G は $\left(\frac{0+0+\sqrt{5}}{3}, \frac{0+3+2}{3}, \frac{0+(-1)+1}{3}\right)$

よって、 $Q\left(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{5}{3}, 0\right)$ (こ)

ここで、 $\triangle OAB$ に垂直なベクトルのひとつは $(-5, \sqrt{5}, 3\sqrt{5})$ であるから

※ 内積を用いて計算をすべきだが、ここでは"外積"という技術を用いた。

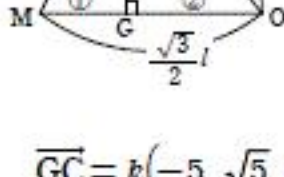


$$\begin{array}{ccccc} y & z & x & y & \\ 2 & 1 & \sqrt{5} & 2 & \\ 3 & -1 & 0 & 3 & \\ \hline & -5 & \sqrt{5} & 3\sqrt{5} & \end{array}$$

高校範囲外ではあるが、参考書や問題集でもよく扱われている。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC} \\ &= \left(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{5}{3}, 0\right) + k(-5, \sqrt{5}, 3\sqrt{5}) \end{aligned}$$

と表せる。



$$OG = \frac{\sqrt{3}}{2}l \times \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}l$$

三平方の定理より

$$CG = \sqrt{l^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}l\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}l$$

$\overrightarrow{GC} = k(-5, \sqrt{5}, 3\sqrt{5})$ より、 $|\overrightarrow{GC}|$ について

$$\frac{\sqrt{6}}{3}l = |k| \sqrt{(-5)^2 + \sqrt{5}^2 + (3\sqrt{5})^2}$$

$l = \sqrt{10}$ より

$$|k| = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{10}}{3 \cdot 5 \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{5}}{15}$$

よって、

$$\overrightarrow{OC} = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{5}{3}, 0\right) \pm \frac{2\sqrt{5}}{15}(-5, \sqrt{5}, 3\sqrt{5})$$

$$= \left(\frac{(\text{あ})}{\frac{(\text{き})}{3}}, \frac{(\text{き})}{3}, \frac{(\text{こ})}{2}\right) \quad (\because (\text{く}) \text{ は正より})$$

次に、平面 $y+3z=t$ について考える。

t の値がいくつのとき、 O, A, B, C を通るかを考えれば

$O(0, 0, 0)$ より $t=0$ のとき

$A(0, 3, -1)$ より $t=0$ のとき

$B(\sqrt{5}, 2, 1)$ より $t=5$ のとき

$C\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{7}{3}, 2\right)$ より $t=\frac{25}{3}$ のとき

(直線 OA を含む平面を平行移動させていくイメージで切断する)

よって、条件をみたすのは

$$\underline{\underline{0}} < t < \underline{\underline{\frac{25}{3}}} \quad (\text{け})$$

図のように交点を P, Q, R, S とおけば

$y+3z=0$ が直線 OA を含む平面であることから、

$y+3z=t$ と正四面体の交点について、

$QP \parallel RS \parallel OA$

は明らか。

ここで $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$ とおくと

$$\overrightarrow{AP} = k(\sqrt{5}, -1, 2)$$

$$= (\sqrt{5}k, -k, 2k)$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

$$= (\sqrt{5}k, -k+3, 2k-1)$$

P は $y+3z=t$ 上の点より

$$-k+3+3(2k-1)=t$$

$$5k=t$$

$$\therefore k = \frac{t}{5}$$

これより、 $AP:AB = t:5$

同様に、 $OQ:OB = t:5$

$$\therefore PQ = \frac{5-t}{5} \cdot OA = \left(1 - \frac{t}{5}\right) \sqrt{10}$$

同様に、 $AS:AO = t:\frac{25}{3}$

$$\therefore SR = \frac{\frac{25}{3}-t}{\frac{25}{3}} \cdot OA = \left(1 - \frac{3}{25}t\right) \sqrt{10}$$

これより

$$(\text{上底}) + (\text{下底}) = \left(1 - \frac{t}{5}\right) \sqrt{10} + \left(1 - \frac{3}{25}t\right) \sqrt{10}$$

$$= \left(2 - \frac{8}{25}t\right) \sqrt{10} \quad (\text{け})$$

また $\triangle ABC$ に着目すれば

余弦定理より

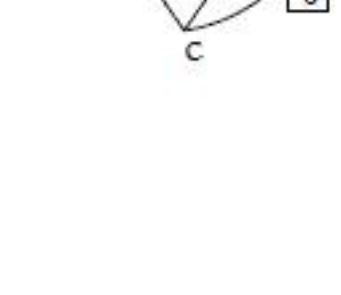
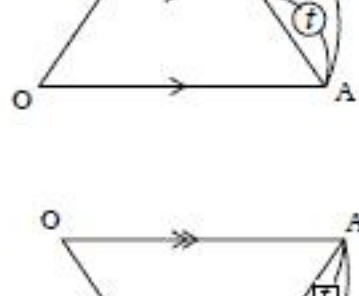
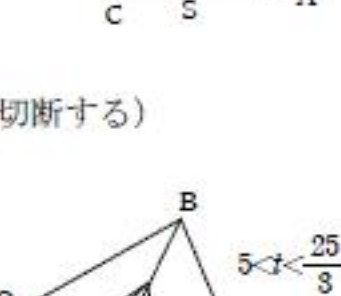
$$PS^2 = AP^2 + AS^2 - 2AP \cdot AS \cdot \cos 60^\circ$$

$$= \left(\frac{t}{5}\sqrt{10}\right)^2 + \left(\frac{3t}{25}\sqrt{10}\right)^2 - 2\left(\frac{t}{5}\sqrt{10}\right)\left(\frac{3t}{25}\sqrt{10}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 10t^2 \left(\frac{1}{25} + \frac{9}{625} - \frac{3}{125}\right)$$

$$= 10t^2 \cdot \frac{19}{625}$$

$$PS = \frac{\sqrt{190}}{25}t$$



[IV]

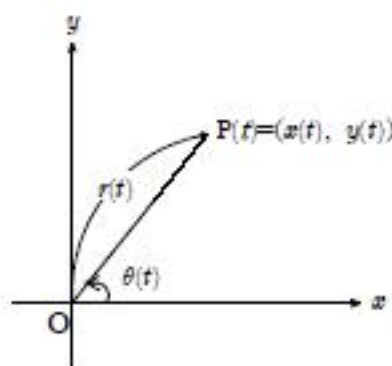
$$\begin{cases} x(t) = r(t) \cos \theta(t) \\ y(t) = r(t) \sin \theta(t) \end{cases}$$

$$r(0) = 1$$

$$\theta'(t) = 1 \text{ より, } \theta(t) = t + \theta_0 \quad (\theta_0 \text{ は定数})$$

$$\begin{aligned} x(0) &= r(0) \cdot \cos \theta(0) \\ &= 1 \cdot \cos(0 + \theta_0) = \cos \theta_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(0) &= r(0) \cdot \sin \theta(0) \\ &= 1 \cdot \sin(0 + \theta_0) = \sin \theta_0 \end{aligned}$$



(1)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= r'(t) \cos(t + \theta_0) + r(t) (-\sin(t + \theta_0)) \\ &= r'(t) \cos(t + \theta_0) - r(t) \sin(t + \theta_0) \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dt} = r'(t) \sin(t + \theta_0) + r(t) \cos(t + \theta_0)$$

$$\overrightarrow{v(t)} = \begin{pmatrix} r'(t) \cos(t + \theta_0) - r(t) \sin(t + \theta_0) \\ r'(t) \sin(t + \theta_0) + r(t) \cos(t + \theta_0) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{b(t)} = \begin{pmatrix} \cos(t + \theta_0) \\ \sin(t + \theta_0) \end{pmatrix}$$

条件と内積の定義より

$$\cos \alpha(t) = \frac{\overrightarrow{v(t)} \cdot \overrightarrow{b(t)}}{|\overrightarrow{v(t)}| |\overrightarrow{b(t)}|}$$

$$= \frac{r'(t) \cos^2(t + \theta_0) - r(t) \sin(t + \theta_0) \cos(t + \theta_0) + r'(t) \sin^2(t + \theta_0) + r(t) \cos(t + \theta_0) \sin(t + \theta_0)}{\sqrt{(r'(t) \cos(t + \theta_0) - r(t) \sin(t + \theta_0))^2 + (r'(t) \sin(t + \theta_0) + r(t) \cos(t + \theta_0))^2} \times 1}$$

$$= \frac{\overset{(a)}{r'(t)}}{\sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2}}$$

(2) $\alpha(t) = \frac{\pi}{4}$ のとき, $\cos \alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{r'(t)}{\sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2}} \quad \dots\dots ①$$

両辺を 2 乗して

$$\frac{1}{2} = \frac{r'(t)^2}{r'(t)^2 + r(t)^2}$$

$$\therefore r(t)^2 = r'(t)^2$$

$$r(t) = \pm r'(t)$$

これより $r(t) = e^{\pm t + C}$ (C は定数)

$$r(0) = 1 \text{ より } C = 0$$

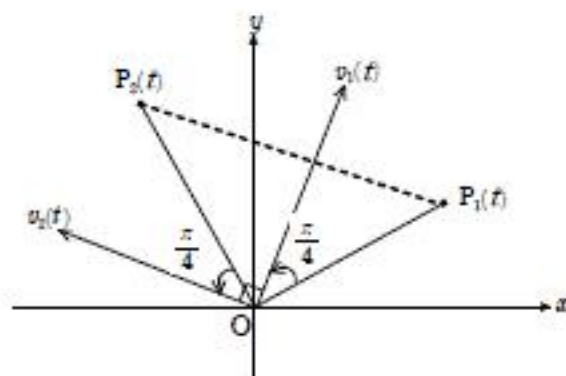
$$\therefore r(t) = e^{\pm t}$$

①より $r(t) = e^{-t}$ は不適。

以上より $r(t) = \overset{(ii)}{e^t}$

(3) すべての t に対し, $\alpha(t) = \frac{\pi}{4}$ であり, $\overrightarrow{v_1(t)} \perp \overrightarrow{v_2(t)}$ より $\overrightarrow{OP_1(t)} \perp \overrightarrow{OP_2(t)}$

ここで, $P(t)$ について $\begin{cases} \text{偏角 } \theta(t) \\ \text{原点からの距離 } r(t) \end{cases}$ より,
 $P_1(t)$ について $\begin{cases} \text{偏角 } \theta_1(t) \\ \text{原点からの距離 } r_1(t) \end{cases}$ より,
 $P_2(t)$ について $\begin{cases} \text{偏角 } \theta_2(t) \\ \text{原点からの距離 } r_2(t) \end{cases}$ とすれば,



条件より,

$t=0$ のとき

$$\begin{cases} r_1(0) = r_2(0) = 1 \\ |\theta_1(0) - \theta_2(0)| = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$t=s$ のとき

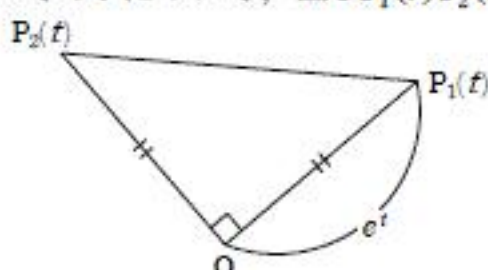
$$\begin{cases} r_1(s) = r_2(s) = e^s \\ |\theta_1(s) - \theta_2(s)| = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$t=u$ のとき

$$\begin{cases} r_1(u) = r_2(u) = e^u \\ |\theta_1(u) - \theta_2(u)| = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ということである。

すなわち, すべての t について, $\triangle OP_1(t)P_2(t)$ は直角二等辺三角形とわかる。



よって,

$$|\overrightarrow{P_1(t)P_2(t)}| = \sqrt{2}e^t$$

これより,

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= |\overrightarrow{P_1(u)P_2(u)}| - |\overrightarrow{P_1(s)P_2(s)}| \\ &= \sqrt{2}(e^u - e^s) \end{aligned}$$

また, P_2 の動く道のりについては

$$l(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

と表せるので,

$$\overrightarrow{v_2(t)} = \begin{pmatrix} e^t \cos(t + \theta_2) - e^t \sin(t + \theta_2) \\ e^t \sin(t + \theta_2) + e^t \cos(t + \theta_2) \end{pmatrix} \quad (\theta_2 \text{ は定数})$$

より,

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= l(s, u) = \int_s^u \sqrt{(e^t \cos(t + \theta_2) - e^t \sin(t + \theta_2))^2 + (e^t \sin(t + \theta_2) + e^t \cos(t + \theta_2))^2} dt \\ &= \int_s^u \sqrt{2e^{2t}} dt \\ &= \sqrt{2} \int_s^u e^t dt \\ &= \sqrt{2}(e^u - e^s) \end{aligned}$$

以上より, (左辺) = (右辺) が示された。