

$$(1) \left(\frac{1}{8}\right)^x \leq 7\left(\frac{1}{2}\right)^x - 6$$

$$t = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad 0 < t < 1 \quad t > 0$$

$$t^3 \leq 7t - 6$$

$$t^3 - 7t + 6 \leq 0$$

$$(t-1)(t^2+t-6) \leq 0$$

$$(t-1)(t-2)(t+3) \leq 0$$

$$t > 0 \text{ より } 1 \leq t \leq 2$$

$$1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 2$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 0$$

(2) 条件の要素を列挙すれば

$$A = \{2, 7, 12, \dots, 92, 97\}$$

$$B = \{1, 8, 15, \dots, 92, 99\}$$

$$A \cap B = \{22, 57, 92\}$$

集合 X に属する自然数の総和を $S(X)$ とかく

$$\begin{aligned} S(A \cup B) &= S(A) + S(B) - S(A \cap B) \\ &= \frac{(2+97) \times 20}{2} + \frac{(1+99) \times 15}{2} - \frac{(22+92) \times 3}{2} \\ &= 990 + 750 - 171 \\ &= 1569 \end{aligned}$$

$$(3) \text{ i) } x_{k-1} < x < x_k \text{ ならば } \begin{cases} x - x_{k-1} > 0 \\ x - x_k < 0 \end{cases}$$

さらに注意して絶対値をはずせば

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^n |x - x_k| \\ &= \underbrace{|x - x_1| + |x - x_2| + \dots + |x - x_{k-1}|}_{\text{すべて正}} + \underbrace{|x - x_k| + \dots + |x - x_n|}_{\text{すべて負}} \\ &= (x - x_1) + (x - x_2) + \dots + (x - x_{k-1}) - (x - x_k) - \dots - (x - x_n) \\ &= (k-1)x - (x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1}) - (n - (k-1))x + (x_k + \dots + x_n) \\ &= (2(k-1) - n)x - (x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1}) + (x_k + \dots + x_n) \\ &= (2(k-1) - n)x - \sum_{k=1}^{k-1} x_k + \left(\sum_{k=1}^n x_k - \sum_{k=1}^{k-1} x_k \right) \\ &= (2(k-1) - n)x + \sum_{k=1}^n x_k - 2 \sum_{k=1}^{k-1} x_k \end{aligned}$$

よって

$$f(x) = 2(k-1) - n$$

$$(3) \text{ ii) } S_n = \sum_{k=1}^n x_k \text{ とかくならば } x_{k-1} \leq x \leq x_k \text{ ならば}$$

$$f(x) = (2(k-1) - n)x + S_n - 2S_{k-1} \quad \text{である}$$

$$x_0 < x \leq x_1 \text{ ならば } f(x) = -nx + S_n$$

$$x_1 \leq x \leq x_2 \text{ ならば } f(x) = (2-n)x + S_n - 2S_1$$

$$x_2 \leq x \leq x_3 \text{ ならば } f(x) = (4-n)x + S_n - 2S_2$$

!

$$x_{k-1} \leq x \leq x_k \text{ ならば } f(x) = (2(k-1) - n)x + S_n - 2S_{k-1}$$

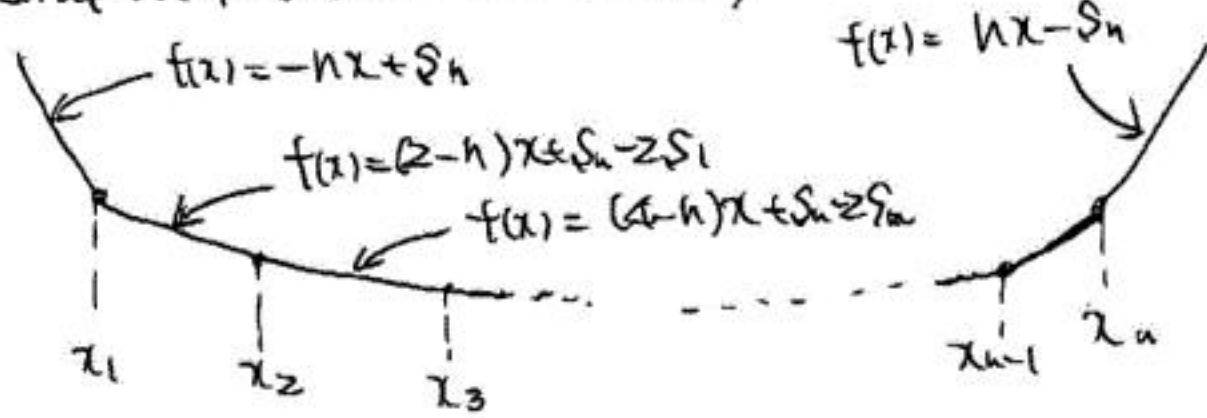
$$x_k \leq x \leq x_{k+1} \text{ ならば } f(x) = (2k - n)x + S_n - 2S_k$$

!

$$x_n \leq x \leq x_{n+1} \text{ ならば } f(x) = nx - S_n$$

よって各区間内数値をかく

Graphの概形をかく(次の図)



(あ) n が偶数のとき、 $f(x)$ の傾きに注目して、

$2(i-1) - n = 0$ となるとすれば

$i = \frac{n}{2} + 1$ であり、このとき、 (x_{i-1}, x_i) において、

$$f'(x) = 0$$

したがって、 $[x_{i-1}, x_i]$ に含まれる任意の x において、

$f(x)$ は最小値をとる。

ここで n が偶数なので、図より、

$$m = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}$$

となり、これは $[x_{i-1}, x_i]$ に含まれるため、 $x = m$ で

最小値をとる。

(い) n が奇数のとき、 $f(x)$ の傾きに注目して、

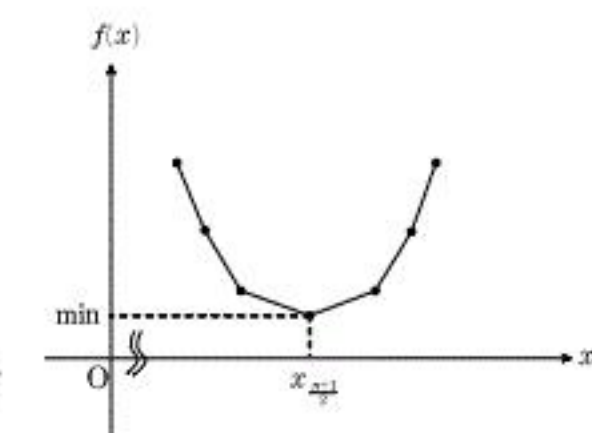
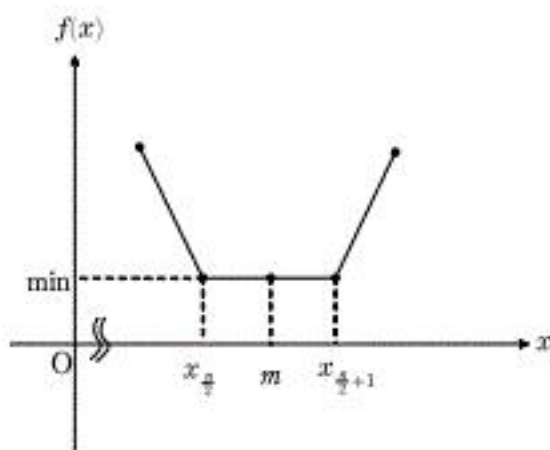
$\begin{cases} 2(i-1) - n < 0 \\ 2i - n > 0 \end{cases}$ となるとすれば

x_i で $f(x)$ は最小となるので、

$\frac{n}{2} < i < \frac{n}{2} + 1$ すなわち、 $i = \frac{n+1}{2}$ であり、このとき

x_i はデータの中央値。

以上より、関数 $f(x)$ は $x = m$ において最小値をとる。



II) (1) Aから始る. n日目までAにあり確率 P_n を求めよ

P_1 は 1回行い, 赤を1回白を1回と確率に等しく.

$$P_1 = \frac{2C_1 \times 1C_1}{3C_2} = \frac{2}{3}$$

P_n は n 日目. n 日目と $n+1$ 日目の状態を求めよ

$$\begin{bmatrix} n \text{ 日目} & n+1 \text{ 日目} \\ A & \xrightarrow{\frac{2}{3}} A \\ B & \xrightarrow{1} \end{bmatrix}$$

漸化式

$$P_{n+1} = P_n \times \frac{2}{3} + (1 - P_n) \times 1$$

$$= -\frac{1}{3}P_n + 1$$

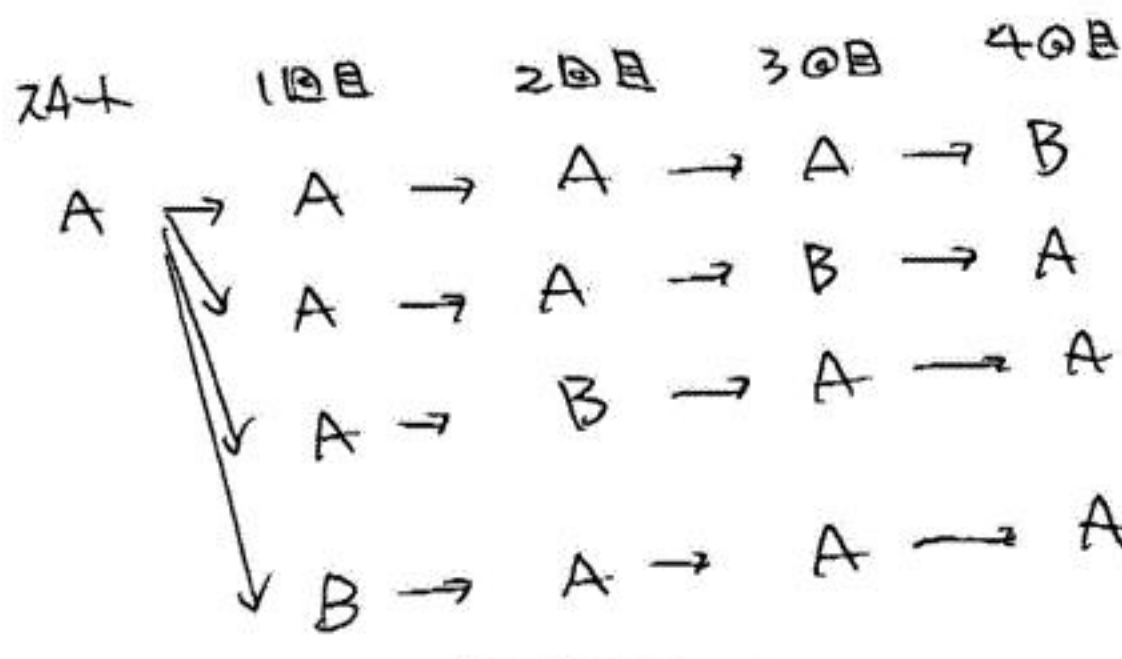
から定まる. $P_1 = \frac{2}{3}$ に代入すれば

$$P_{n+1} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{3}(P_n - \frac{3}{4}) \quad (*)$$

$$P_n - \frac{3}{4} = (\frac{2}{3} - \frac{3}{4}) \cdot (-\frac{1}{3})^{n-1}$$

$$\therefore P_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{12}(-\frac{1}{3})^{n-1}$$

(2) 4日目から状態を求めよ



これらの確率を計算すれば

$$q_4 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{8}{81} + \frac{4}{27} \times 3$$

$$= \frac{44}{81}$$

Bが1回ありあつたのは

n日目に初めてBがあられたとき $1 \sim n-1$ 日目までAにあり
Bがあられたときを q_n とする.

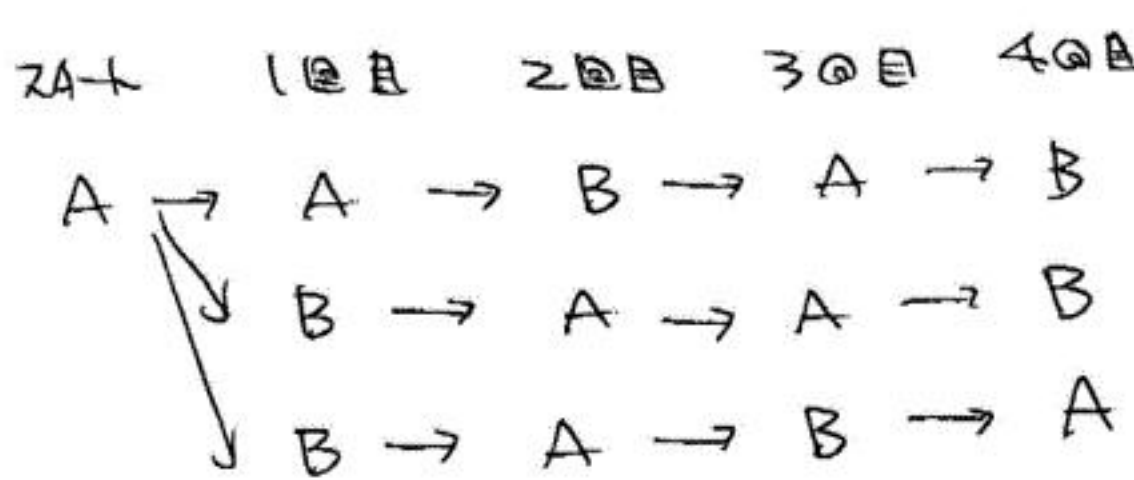
$$q_n = \underbrace{(\frac{2}{3})^{n-1}}_{A \rightarrow A} \times \underbrace{\frac{1}{3}}_{A \rightarrow B} + (n-1) \underbrace{C_1 \cdot (\frac{1}{3})^1}_{A \rightarrow B} \times \underbrace{1}_{B \rightarrow A} \times \underbrace{(\frac{2}{3})^{n-2}}_{A \rightarrow A}$$

$$= \frac{2^{n-1}}{3^n} + (n-1) \cdot \frac{2^{n-2}}{3^{n-1}}$$

$$= \frac{2^{n-2}}{3^n} \cdot (2 + 3(n-1))$$

$$= \frac{2^{n-2}}{3^n} (3n-1)$$

B) 4日目から状態を求めよ



これらの確率を計算する

$$r_4 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{3} \times 1$$

$$= \frac{2}{27} + \frac{2}{27} + \frac{1}{9}$$

$$= \frac{7}{27}$$

n日目にBで終わるとき.

$$\begin{cases} A \rightarrow B \text{ が } 2 \text{ 回} \dots 1 \text{ 回は } n \text{ 日目の } A \rightarrow B \text{ かつ } 1 \text{ 回は } 1 \sim n-2 \text{ 日目から } A \text{ へ} \\ B \rightarrow A \text{ が } 1 \text{ 回} \dots A \rightarrow B \text{ の直後に } A \rightarrow B \\ A \rightarrow A \text{ が } n-3 \text{ 回} \end{cases}$$

この確率は

$$(n-2)C_1 \cdot (\frac{1}{3})^2 \times 1 \times (\frac{2}{3})^{n-3} = (n-2) \cdot \frac{2^{n-3}}{3^{n-1}}$$

n日目にAで終わるとき.

$$\begin{cases} A \rightarrow B \text{ が } 2 \text{ 回} \dots 1 \sim n-1 \text{ 日目から } A \text{ へ連続して } 2 \text{ 回} \\ B \rightarrow A \text{ が } 2 \text{ 回} \dots A \rightarrow B \text{ の直後に } A \rightarrow B \\ A \rightarrow A \text{ が } n-4 \text{ 回} \end{cases}$$

この確率は

$$(\underbrace{(n-1)C_2}_{1 \sim n-1 \text{ 日目から } 2 \text{ 回}} - \underbrace{(n-2)C_1}_{\text{連続の場合}}) \cdot (\frac{1}{3})^2 \times 1^2 \times (\frac{2}{3})^{n-4}$$

$$= \left\{ \frac{(n-1)(n-2)}{2} - (n-2) \right\} \cdot \frac{2^{n-4}}{3^{n-2}}$$

$$= (n-2) \left(\frac{n-1}{2} - 1 \right) \cdot \frac{2^{n-4}}{3^{n-2}}$$

$$= (n-2)(n-3) \cdot \frac{2^{n-5}}{3^{n-2}}$$

以上より求める確率は

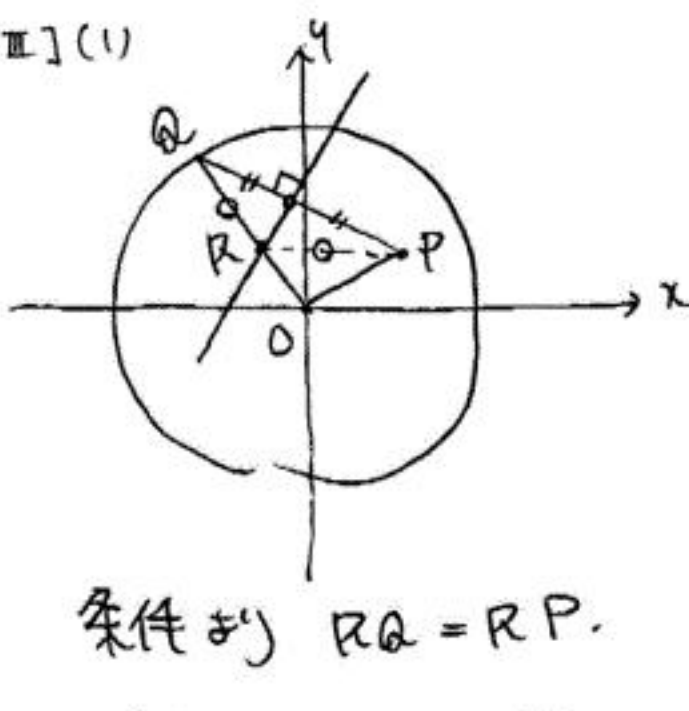
$$r_n = (n-2) \cdot \frac{2^{n-3}}{3^{n-1}} + (n-2)(n-3) \cdot \frac{2^{n-5}}{3^{n-2}}$$

$$= (n-2) \cdot \frac{2^n}{3^n} \left\{ \frac{3}{8} + (n-3) \cdot \frac{9}{32} \right\}$$

$$= (n-2) \cdot \frac{2^n}{3^n} \cdot \left(\frac{9}{32}n - \frac{15}{32} \right)$$

$$= (n-2)(3n-5) \cdot \frac{2^{n-5}}{3^{n-1}}$$

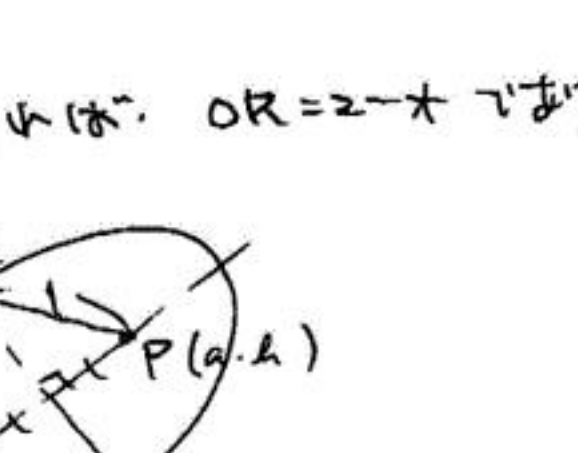
(※ この式はこれらの整理した形に直したか
整理が合っているか確認する.)



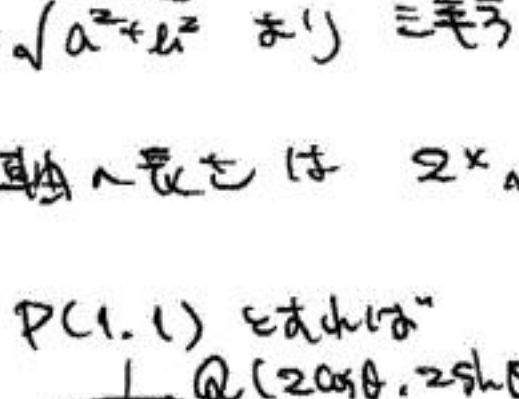
条件より $OR = RP$.

$$\begin{aligned} \therefore & OR + RP \\ &= OR + OR \\ &= 2OR \\ &= 2 \end{aligned}$$

から $r = 1$. R は OP の中点. P が $a^2 + b^2 = 4$ 上の点
 常に $OR = RP$ なる点 R は OP の中点であるから
 描くことができる



$PR = r$ である. $OR = 2 - r$ より 図より 半径 a は $2 - r$



$OR = RP$ より $OR + RP = 2$ より $OR = RP = 1$

$OP = \sqrt{a^2 + b^2}$ より 三平方の定理を用いる

$$半径 a \text{ は } 2 \times \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2} = \sqrt{4 - (a^2 + b^2)}$$

より $P(1,1)$ である

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$ である $RA^2 = RP^2$ より

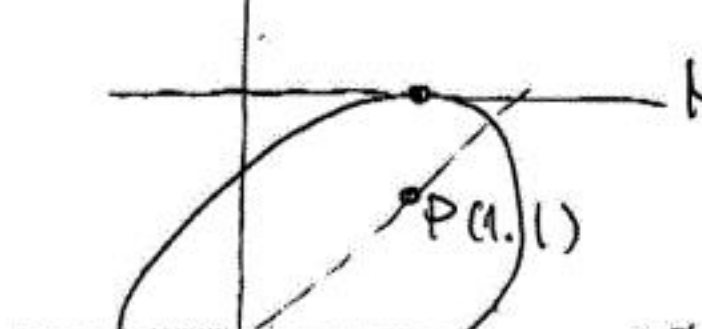
$$(2-r)^2 = (1-r\cos\theta)^2 + (1-r\sin\theta)^2$$

$$4 - 4r + r^2 = 1 - 2r\cos\theta + r^2\cos^2\theta + 1 - 2r\sin\theta + r^2\sin^2\theta$$

$$= 2 - 2r(\cos\theta + \sin\theta) + r^2$$

$$\{4 - 2(\cos\theta + \sin\theta)\}r = 2$$

$$\therefore r = \frac{1}{2 - (\cos\theta + \sin\theta)}$$



図より $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ は明らかである. 以下 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

に注目する. R の座標を求めよう

$$y = \frac{\sin\theta}{2 - (\cos\theta + \sin\theta)} \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ なら } y > 0)$$

ここで y を $\sin\theta$ とする $(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ より

$$y = \frac{1}{\frac{2 - \cos\theta}{\sin\theta} - 1}$$

より $g(\theta) = \frac{2 - \cos\theta}{\sin\theta} \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ とおけば

$g(\theta)$ が最小になる. y は最大になる

$$g'(\theta) = \frac{\sin^2\theta - (2 - \cos\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta - 2\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1 - 2\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

$$g'(\theta) = 0 \text{ より } 2 - \cos\theta = 1$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ なら } \theta = \frac{\pi}{3}$$

増減表をかく

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$g'(\theta)$	-	0	+
$g(\theta)$	$\sqrt{3}$	1	

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2 - \cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$$

より $\theta = \frac{\pi}{3}$ とき $g(\theta)$ は最小.

したがって y は最大値 $\frac{1}{\sqrt{3} - 1}$ である

求める値は $r_0 = \frac{1}{2 - (\cos\theta_0 + \sin\theta_0)}$

$$= \frac{1}{2 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{3 - \sqrt{3}}$$

$$\theta_0 = \frac{\pi}{3}$$

(2) 図より $R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$P(2,0)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

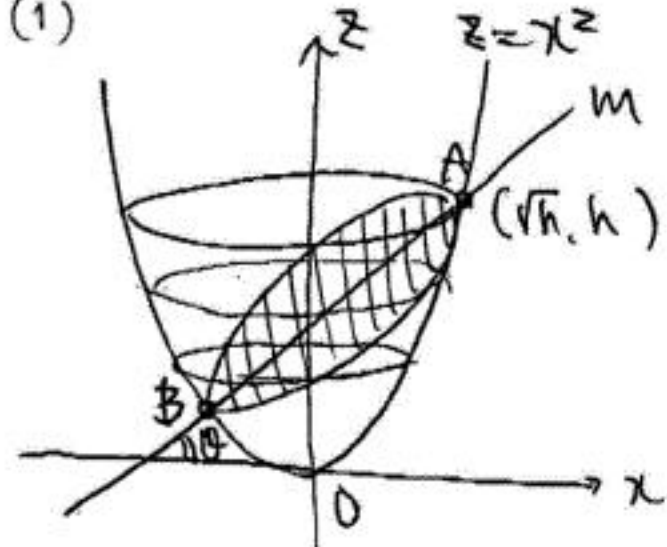
$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

$R(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$Q(2\cos\theta, 2\sin\theta)$

IV]



0 傾けるとき、水が a に至るための条件は、直線 m の傾きが点 $(\sqrt{h}, h)$ における放物線の接線の傾きより大きくなることである。

よって $0 \leq \tan \theta < 2\sqrt{h}$

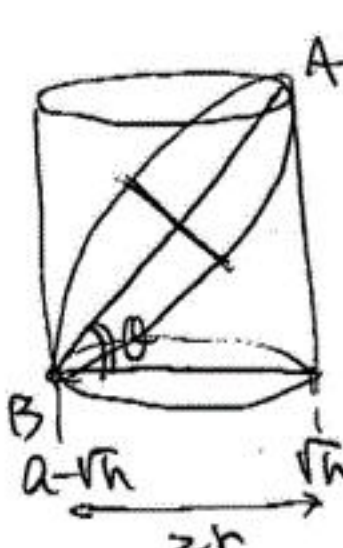
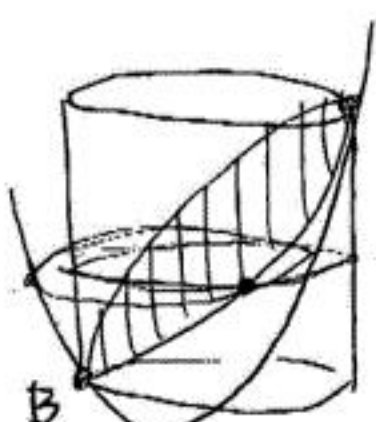
直線 m の方程式は傾き a かつ点 $(\sqrt{h}, h)$ を通るため

$$z = a(x - \sqrt{h}) + h$$

$z = x^2$ と a の交点座標は連立方程式を解いて

$$\begin{aligned} x^2 - ax + a\sqrt{h} - h &= 0 \\ (x - \sqrt{h})(x - (a - \sqrt{h})) &= 0 \\ \therefore x &= \sqrt{h}, a - \sqrt{h} \end{aligned}$$

よって $A(\sqrt{h}, h)$ $B(a - \sqrt{h}, (a - \sqrt{h})^2)$ とおくと、この条件で切断面は水が a となる円柱の切断面に等しいことが、この切断面は右図で表し、この面積は円柱の半径を r とおくと



$$\begin{aligned} T(a) &= \pi \left(\frac{1}{2} AB \right) \cdot r \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2r}{\cos \theta} \cdot \frac{2r}{2} \\ &= \frac{\pi(a - \sqrt{h} - \sqrt{h})^2}{4 \cos \theta} \\ &= \frac{\pi(a - 2\sqrt{h})^2}{4 \cos \theta} \end{aligned}$$

よって $a = \tan \theta$ とおくと $\frac{1}{\cos \theta} = \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \sqrt{1 + a^2}$

であるから

$$T(a) = \frac{\pi}{4} (a - 2\sqrt{h})^2 \sqrt{1 + a^2}$$

これを

$$\begin{aligned} T'(a) &= \frac{\pi}{4} 2(a - 2\sqrt{h}) \sqrt{1 + a^2} + \frac{\pi}{4} (a - 2\sqrt{h})^2 \cdot \frac{2a}{2\sqrt{1 + a^2}} \\ &= \frac{\pi(a - 2\sqrt{h})}{4\sqrt{1 + a^2}} (3a^2 - 2\sqrt{h}a + 2) \\ \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\pi(-2\sqrt{h})}{4} \cdot 2 &= -\pi\sqrt{h} \end{aligned}$$

よって $0 < a < 2\sqrt{h}$ に極値をとる。

$T'(a)$ が正から負になる点が存在するから $\frac{\pi(a - 2\sqrt{h})}{4\sqrt{1 + a^2}} < 0$ より

$f(a) = 3a^2 - 2\sqrt{h}a + 2$ (ここで $f(0) = 2 > 0$)

$f(2\sqrt{h}) = 8h + 2$ より $f(a)$ の最小値が負になるのはよい

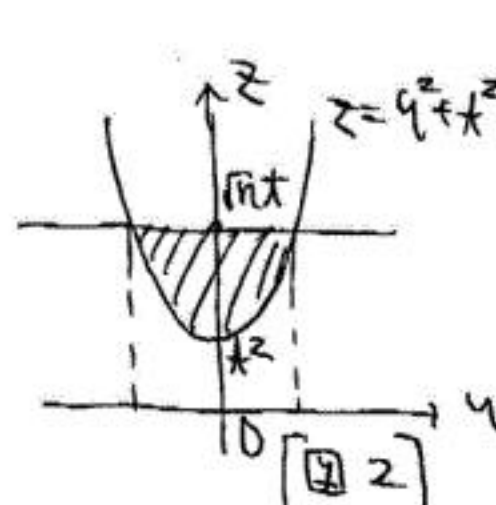
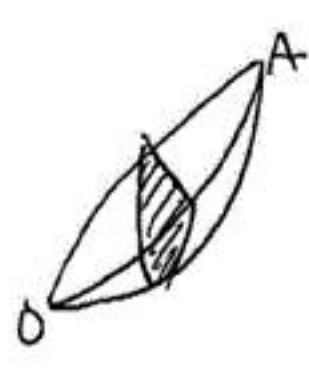
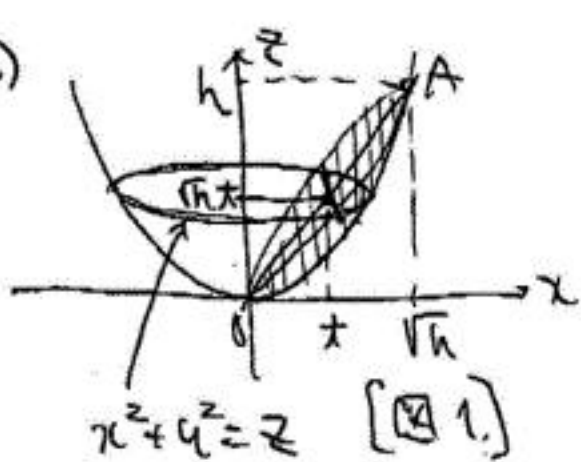
$$f(a) = 3\left(a - \frac{\sqrt{h}}{3}\right)^2 - \frac{h}{3} + 2$$

$0 < a < 2\sqrt{h}$ より $a = \frac{\sqrt{h}}{3}$ とき最小値 $-\frac{h}{3} + 2$ となるから

$$-\frac{h}{3} + 2 < 0$$

$$\therefore h > 6$$

(2)



$a = \sqrt{h}$ とき図1 (斜線部) の体積を求めよ

$x = t$ とき $x^2 + y^2 = z$ より切断面は放物線。

$z = \sqrt{h}t$ とき $\sqrt{h}t = y^2 + t^2$ より $y = \pm \sqrt{\sqrt{h}t - t^2}$

よって図2で表されるように、 $x = t$ ときこの切断面の面積 $S(t)$ は

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{6} (2\sqrt{\sqrt{h}t - t^2})^3 \\ &= \frac{4}{3} (\sqrt{h}t - t^2)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

よって求める体積 V は

$$V = \int_0^{\sqrt{h}} \frac{4}{3} (\sqrt{h}t - t^2)^{\frac{3}{2}} dt$$

よって $t = \sqrt{h}u$ とおくと $t \mid 0 \rightarrow \sqrt{h}$

$u \mid 0 \rightarrow 1$

$\frac{dt}{du} = \sqrt{h}$

$$V = \int_0^1 \frac{4}{3} (\sqrt{h} \cdot \sqrt{h}u - (\sqrt{h}u)^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{h} du$$

$$= \int_0^1 \frac{4}{3} h^2 \cdot u^{\frac{3}{2}} (1 - u)^{\frac{3}{2}} du$$

$$= \frac{4}{3} h^2 \int_0^1 u^{\frac{3}{2}} (1 - u)^{\frac{3}{2}} du$$

$$= \frac{4}{3} h^2 \times \frac{3\pi}{128} \quad \downarrow \text{条件より}$$

$$= \frac{\pi}{32} h^2$$