

【1】

【解答】

(1)	(あ)		
	$1< a \leq \sqrt{5}+1$		
(2)	(い)	(う)	(え)
	$\frac{1}{4}$	$\frac{25}{16}$	$\frac{\sqrt{15}}{16}$
(3)	(お)	(か)	(き)
	2	10	80

【解説】

(1)

まず、真数条件より $x+2a>0$ かつ $\frac{x}{4}>0$ である。 $a>1$ より、真数条件は $x>0$ となる。この条件下で与えられた不等式を変形すると

$$\begin{aligned}\log_a(x+2a)-\log_{\frac{1}{a}}\left(\frac{x}{4}\right)<2 \\ \Leftrightarrow \log_a(x+2a)+\log_a\left(\frac{x}{4}\right)<2\log_aa \\ \Leftrightarrow \log_a(x+2a)\left(\frac{x}{4}\right)<\log_aa^2\end{aligned}$$

である。ここで、 $a>1$ であることから、

$$\begin{aligned}(x+2a)\left(\frac{x}{4}\right)<a^2 \\ \Leftrightarrow x^2+2ax-4a^2<0 \\ \Leftrightarrow (-\sqrt{5}-1)a<x<(\sqrt{5}-1)a\ (\because a>0)\end{aligned}$$

となる。 $\sqrt{5}-1>0$ 、 $-\sqrt{5}-1<0$ より $(-\sqrt{5}-1)a<0$ 、 $(\sqrt{5}-1)a>0$ となるから、真数条件 $x>0$ と

合わせると、 $A(a)=(0,(\sqrt{5}-1)a)$ となる。ゆえに、 $A(a)\subset(-\infty,4)$ となる a の条件は

$$\begin{aligned}(\sqrt{5}-1)a\leq 4 \\ \Leftrightarrow a\leq \frac{4}{\sqrt{5}-1}=\sqrt{5}+1\end{aligned}$$

となり、 $a>1$ とあわせると、結局求める a の範囲は、

$$1< a \leq \sqrt{5}+1$$

である。

(2)

$2\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}=\vec{0}$ 、 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ であるから、

$$\begin{aligned}|-4\vec{c}|^2&=|2\vec{a}+3\vec{b}|^2 \\ \Leftrightarrow 16&=4+12\vec{a}\cdot\vec{b}+9 \\ \Leftrightarrow 12\vec{a}\cdot\vec{b}&=3 \\ \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

である。同様にして、

$$\begin{aligned}|-3\vec{b}|^2&=|2\vec{a}+4\vec{c}|^2 \\ \Leftrightarrow 16\vec{a}\cdot\vec{c}&=-11 \\ \therefore \vec{a}\cdot\vec{c}&=-\frac{11}{16}\end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}|-2\vec{a}|^2&=|3\vec{b}+4\vec{c}|^2 \\ \Leftrightarrow 24\vec{b}\cdot\vec{c}&=-21 \\ \therefore \vec{b}\cdot\vec{c}&=-\frac{7}{8}\end{aligned}$$

となる。ゆえに、

$$\begin{aligned}|\vec{a}+\vec{b}+t\vec{c}|^2&=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|t\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2t\vec{a}\cdot\vec{c}+2t\vec{b}\cdot\vec{c} \\ &=1+1+t^2+\frac{1}{2}-\frac{11}{8}t-\frac{7}{4}t \\ &=t^2-\frac{25}{8}t+\frac{5}{2} \\ &=\left(t-\frac{25}{16}\right)^2-\frac{625}{256}+\frac{640}{256} \\ &=\left(t-\frac{25}{16}\right)^2+\frac{15}{256}\end{aligned}$$

である。 $|\vec{a}+\vec{b}+t\vec{c}|^2$ が最小値をとるとき、 $|\vec{a}+\vec{b}+t\vec{c}|$ も最小値をとるので、 $t=\frac{25}{16}$ のとき、

$$|\vec{a}+\vec{b}+t\vec{c}| \text{は最小値}\frac{\sqrt{15}}{16} \text{をとる。}$$

(3)

円周上に、連続する合計 n 個の赤い玉と白い玉のパターンが周期的に並んでいるとき、その並び方を周期 n と呼ぶことにする。ただし、 n が複数次考えられる場合は、そのうちで最小のものを適用する。このとき、円を時計回りに玉 n 個分だけ回すことで初めの並び方と重なるので、周期 n のものの中で実際に異なる並び方は、周期 n のもののすべての順列の個数を n で割ったものとなる。また、以下では赤い玉を r 、白い玉を w とあらわす。 $k=1$ のとき、玉は合計で4個あるため、周期は2,4のものが考えられる。

[1] 周期2のとき、

繰り返し単位は (r, w) 、 (w, r) の2通りあるので、

$$\begin{aligned}\frac{2}{2}&=1(\text{通り}) \\ &\text{である。}\end{aligned}$$

[2] 周期4のとき、

繰り返し単位は ${}_4\text{C}_2=6$ 通りあり、このうち2つは周期2のものに含まれるので、

$$\begin{aligned}\frac{6-2}{4}&=1(\text{通り}) \\ &\text{である。}\end{aligned}$$

以上[1],[2]の結果から、

$$N_1=1+1=2$$

である。次に、 $k=2$ のとき、玉は合計で8個あるため、周期は2,4,8のものが考えられる。

[3] 周期2,4のとき、

これは N_1 の値と同じなので、2である。

[4] 周期8のとき、

繰り返し単位は ${}_8\text{C}_4=70$ 通りあり、このうち6つは周期2,4のものに含まれるので、

$$\begin{aligned}\frac{70-6}{8}&=8(\text{通り}) \\ &\text{である。}\end{aligned}$$

以上[3],[4]の結果から、

$$N_2=2+8=10$$

である。次に、 $k=3$ のとき、玉は合計で12個あるため、周期は2,4,6,12のものが考えられる。

[5] 周期2,4のとき、

これは N_1 の値と同じなので、2である。

[6] 周期6のとき、

繰り返し単位は ${}_6\text{C}_3=20$ 通りあり、このうち2つは周期2のものに含まれるので、

$$\begin{aligned}\frac{20-2}{6}&=3(\text{通り}) \\ &\text{である。}\end{aligned}$$

[7] 周期12のとき、

繰り返し単位は ${}_{12}\text{C}_6=924$ 通りあり、このうち2つは周期2、 $6-2=4$ つは周期4、 $20-2=18$ 通りは周期6のものに含まれるので、

$$\begin{aligned}\frac{924-2-4-18}{12}&=75(\text{通り}) \\ &\text{である。}\end{aligned}$$

以上[5],[6],[7]の結果から、

$$N_3=2+3+75=80$$

である。

[Ⅱ]

〔解答〕

(1)	(あ)	(い)	(う)
	$\frac{3k-2}{3k}$	$\frac{2}{3k}$	$\frac{2k+1}{2k+2}$
(2)	(え)	(お)	
	$\left(\frac{3k-2}{3k}\right)^n$	$e^{-\frac{2}{3}}$	
(3)	(か)	(き)	(く)
	$\frac{16}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$

〔解説〕

(1) $a_n(k)$ について、 n 回操作 T を行った後袋 B にカードが 3 枚あるのは、 $(n-1)$ 回操作 T を行った後袋 B に 3 枚カードがあり、かつ n 回目の操作で取り出した 2 枚のカードの番号が異なる場合である。このとき、 n 回目の操作において、引くカードの組み合わせの総数は、 ${}_kC_1 \cdot {}_3C_1 = 3k$ (通り) である。また、取り出した 2 枚のカードが同じになるのは、A、B から引いたカードがともに 1 或いはともに 2 である場合の 2 通りである。したがって、 n 回目の操作で取り出す 2 枚のカードの番号が異なる確率は、 $\frac{3k-2}{3k}$ であり、

$$a_n(k) = \frac{3k-2}{3k} a_{n-1}(k)$$

となる。また、 $b_n(k)$ について、 n 回目の操作の後袋 B に 2 枚のカードがあるのは以下の場合である。

[1] $(n-1)$ 回目の操作後袋 B にカードが 3 枚あり、 n 回目の操作で取り出す 2 枚のカードの番号が同じになる場合

この確率は、 $a_{n-1}(k) \cdot \frac{2}{3k} = \frac{2}{3k} a_{n-1}(k)$ である。

[2] $(n-1)$ 回目の操作後袋 B にカードが 2 枚あり、 n 回目の操作で取り出す 2 枚のカードの番号が異なる場合

このとき、 n 回目の操作において、引くカードの組み合わせの総数は、 ${}_{k+1}C_1 \cdot {}_2C_1 = 2(k+1)$ (通り) である。ゆえに、 n 回目の操作で、取り出す 2 枚のカードが同じになる確率は、1、2 のうち袋 B に残っているいずれか 1 種類の数字のカードのを袋 A、B からともに取り出す場合であるので、 $\frac{1}{2(k+1)}$ である。したがって、求める確率は、

$$b_{n-1}(k) \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{2(k+1)} \right\} = \frac{2k+1}{2k+2} b_{n-1}(k)$$

である。

以上[1], [2]より、

$$b_n(k) = \frac{2}{3k} a_{n-1}(k) + \frac{2k+1}{2k+2} b_{n-1}(k)$$

である。

(2) 確率 $a_1(k)$ は、袋 B に 3 枚入っている場合において、取り出す 2 枚のカードの番号が異なる確率なので、 $a_1(k) = \frac{3k-2}{3k}$ である。したがって、(1) の結果を用いて、

$$a_n(k) = \frac{3k-2}{3k} a_{n-1}(k) = \cdots = \left(\frac{3k-2}{3k} \right)^{n-1} a_1(k) = \left(\frac{3k-2}{3k} \right)^n$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} a_k(k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{3k-2}{3k} \right)^k \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{3k} \right)^k \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{2}{3k} \right)^{-\frac{3k}{2}} \right\}^{-\frac{2}{3}} \\ &= e^{-\frac{2}{3}} \quad (\because \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e) \end{aligned}$$

が得られる。

(3) $k=3$ のとき、(1) より、

$$\begin{aligned} b_n(3) &= \frac{2}{9} a_{n-1}(3) + \frac{7}{8} b_{n-1}(3) \\ &= \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{7}{9} \right)^{n-1} + \frac{7}{8} b_{n-1}(3) \end{aligned}$$

である。この等式の両辺を $\left(\frac{7}{9} \right)^n$ ($\neq 0$) で割ると、

$$\left(\frac{9}{7} \right)^n b_n(3) = \frac{2}{7} + \frac{9}{8} \cdot \left(\frac{9}{7} \right)^{n-1} b_{n-1}(3)$$

が導かれる。ここで、 $c_n = \left(\frac{9}{7} \right)^n b_n(3)$ とおくと、

$$c_n = \frac{2}{7} + \frac{9}{8} c_{n-1} \Leftrightarrow c_n + \frac{16}{7} = \frac{9}{8} \left(c_{n-1} + \frac{16}{7} \right)$$

である。ここで、確率 $b_1(3)$ は、袋 A に 3 枚、袋 B に 3 枚入っている場合において、取り出す 2 枚のカードの番号が同じ確率なので、(1) の議論より $b_1(3) = \frac{2}{3 \cdot 3} = \frac{2}{9}$ である。よって、数列

$\left\{ c_n + \frac{16}{7} \right\}$ は、初項 $c_1 + \frac{16}{7} = \frac{9}{7} b_1(3) + \frac{16}{7} = \frac{18}{7}$ 、公比 $\frac{9}{8}$ の等比数列であるので、

$$c_n = \frac{18}{7} \cdot \left(\frac{9}{8} \right)^{n-1} - \frac{16}{7}$$

となる。よって、 $b_n(3)$ は、

$$\begin{aligned} b_n(3) &= \left(\frac{7}{9} \right)^n c_n \\ &= \left(\frac{7}{9} \right)^n \left\{ \frac{18}{7} \left(\frac{9}{8} \right)^{n-1} - \frac{16}{7} \right\} \\ &= \frac{16}{7} \left(\frac{7}{8} \right)^n - \frac{16}{7} \left(\frac{7}{9} \right)^n \\ &= \frac{16}{7} \left(\frac{7}{8} \right)^n \left\{ 1 - \left(\frac{8}{9} \right)^n \right\} \end{aligned}$$

と導かれる。

【Ⅲ】

〔解答〕

	(あ)	(い)	(う)	(え)	
(1)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{32}$	
	(お)	(か)	(き)	(く)	
(2)	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	
	(け)	(こ)	(さ)	(し)	(す)
(3)	$\frac{1}{2}A^2+\frac{1}{4}B-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{7}}{2}$	$\frac{\sqrt{7}}{8}$

〔解説〕

(1)

x を実数として、

$$f(x)=\sin x\sin 2x\sin 3x$$

とおく。このとき、積和の公式および倍角の公式より、

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{2}(\cos 3x - \cos x)\sin 3x \\ &= \frac{1}{2}\sin 3x\cos x - \frac{1}{2}\sin 3x\cos 3x \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 6x \\ &= \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 6x \end{aligned}$$

と書くことができる。ここで、方程式 $f(x)=0$ の解は整数 k を用いて、

$$x=k\pi, \frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{3}$$

のいずれかで表されるから、 $f(p)=0$ を満たす最小の正の数 p の値は $p=\frac{\pi}{3}$ である。 $0\leq x$
 $\leq p$ の範囲においては $\sin x, \sin 2x, \sin 3x$ はすべて 0 以上の値となり、 $f(x)\geq 0$ となる。また、
 $f(x)$ は連続な関数であるから、曲線 $y=f(x)$ ($0\leq x\leq p$) と x 軸で囲まれた部分の面積は、

$$\begin{aligned} \int_0^p f(x)dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 6x \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\cos 4x + \frac{1}{6}\cos 6x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} \right) - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) \right\} \\ &= \frac{9}{32} \end{aligned}$$

である。

(2)

x を実数として、

$$g(x)=-\sin x\sin 2x+\sin 2x\sin 3x-\sin 3x\sin x$$

とおく。このとき、積和の公式より、

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2}(\cos 3x - \cos x) - \frac{1}{2}(\cos 5x - \cos x) + \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 2x) \\ &= -\frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 5x) + \frac{1}{2}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos 4x \end{aligned}$$

と書ける。また、 $g(x)$ を和積の公式を用いて変形すると、

$$g(x)=-2\cos\left(\frac{7}{2}x\right)\cos\left(\frac{3}{2}x\right)+2\cos\left(\frac{7}{2}x\right)\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$$

となるから、

$$g\left(\frac{\pi}{7}\right)=-2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{3}{14}\pi\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)=0$$

である。

(3)

α, β, γ を実数として、

$$\begin{aligned} A &= \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \\ B &= \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \\ C &= \sin \alpha \sin \beta + \sin \beta \sin \gamma + \sin \gamma \sin \alpha \end{aligned}$$

とおく。 B について倍角の公式を用いると、

$$\begin{aligned} B &= (1-2\sin^2 \alpha) + (1-2\sin^2 \beta) + (1-2\sin^2 \gamma) \\ \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma &= -\frac{1}{2}B + \frac{3}{2} \end{aligned} \quad \dots\dots ①$$

が得られ、 A^2 を計算すると、

$$\begin{aligned} A^2 &= (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)^2 \\ &= \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma + 2(\sin \alpha \sin \beta + \sin \beta \sin \gamma + \sin \gamma \sin \alpha) \\ &= \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma + 2C \end{aligned} \quad \dots\dots ②$$

が得られる。①、②より C を A, B の式で表すと、

$$\begin{aligned} A^2 &= -\frac{1}{2}B + \frac{3}{2} + 2C \\ C &= \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{4}B - \frac{3}{4} \end{aligned} \quad \dots\dots ③$$

である。以下、 $\alpha=\frac{\pi}{7}, \beta=-\frac{2}{7}\pi, \gamma=-\frac{3}{7}\pi$ のときを考える。このとき、

$\sin(-x)=-\sin x, \cos(-x)=\cos x$ に注意すると、 A, B, C は、

$$\begin{aligned} A &= \sin \frac{\pi}{7} - \sin \frac{2}{7}\pi - \sin \frac{3}{7}\pi \\ B &= \cos \frac{2}{7}\pi + \cos \frac{4}{7}\pi + \cos \frac{6}{7}\pi \\ C &= -\sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{2}{7}\pi + \sin \frac{2}{7}\pi \sin \frac{3}{7}\pi - \sin \frac{3}{7}\pi \sin \frac{\pi}{7} \end{aligned}$$

となる。ここで、 i を虚数単位として、

$$z=\cos \frac{2}{7}\pi+i\sin \frac{2}{7}\pi$$

とおくと、ド・モアブルの定理より、

$$z^7=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$$

である。これより、

$$\begin{aligned} z^7-1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (z-1)(z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1) &= 0 \end{aligned}$$

であり、 $z\neq 1$ であるから、

$$z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$$

が成り立つ。よって、この等式の両辺に z をかけると、

$$\sum_{k=1}^7 z^k=0$$

が得られる。また、ド・モアブルの定理より、

$$\begin{aligned} z^4 &= \cos \frac{8}{7}\pi + i\sin \frac{8}{7}\pi \\ &= \cos\left(2\pi - \frac{6}{7}\pi\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{6}{7}\pi\right) \\ &= \cos \frac{6}{7}\pi - i\sin \frac{6}{7}\pi \end{aligned}$$

であり、同様にして、

$$\begin{aligned} z^5 &= \cos \frac{4}{7}\pi - i\sin \frac{4}{7}\pi \\ z^6 &= \cos \frac{2}{7}\pi - i\sin \frac{2}{7}\pi \end{aligned}$$

であるから、 B の値は、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^7 z^k &= 2\left(\cos \frac{2}{7}\pi + \cos \frac{4}{7}\pi + \cos \frac{6}{7}\pi\right) + z^7 \\ \Leftrightarrow 0 &= 2B + 1 \\ \therefore B &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。さらに、 $C=g\left(\frac{\pi}{7}\right)=0$ であることと、 $A=\sin \frac{\pi}{7} - \sin \frac{2}{7}\pi - \sin \frac{3}{7}\pi$ について、

$0<\frac{\pi}{7}<\frac{2}{7}\pi<\frac{3}{7}\pi<\frac{\pi}{2}$ に注意すると

$$0<\sin \frac{\pi}{7}<\sin \frac{2}{7}\pi<\sin \frac{3}{7}\pi$$

となり $A<0$ であることから、③式より A の値は、

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{4}B - \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow 0 &= \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow A^2 &= \frac{7}{4} \\ \therefore A &= -\frac{\sqrt{7}}{2} \quad (\because A<0) \end{aligned}$$

である。このことと(1)の結果から、 $f\left(\frac{\pi}{7}\right)$ の値は、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{7}\right) &= \frac{1}{4}\sin \frac{2}{7}\pi + \frac{1}{4}\sin \frac{4}{7}\pi - \frac{1}{4}\sin \frac{6}{7}\pi \\ &= \frac{1}{4}\sin \frac{2}{7}\pi + \frac{1}{4}\sin\left(\pi - \frac{3}{7}\pi\right) - \frac{1}{4}\sin\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\sin \frac{\pi}{7} + \frac{1}{4}\sin \frac{2}{7} + \frac{1}{4}\sin \frac{3}{7}\pi \\ &= -\frac{1}{4}A \\ &= \frac{\sqrt{7}}{8} \end{aligned}$$

である。

【IV】

【解答】

	(あ)	(い)	(う)	(え)	(お)	(か)
(1)	0	0	$-\pi$	π	0	2
(3)	(き)					
	$4\sin\frac{t}{2}$					
(4)	(く)	(け)				
	t	$\frac{t}{2}$				
(5)	(こ)		(さ)			
	$2\sin\frac{t}{2}-t\cos\frac{t}{2}$		$t\sin\frac{t}{2}$			
(6)	(し)					
	$\frac{\pi^3}{12}+\frac{\pi}{2}$					

(2)

$-\pi < x_0 < \pi$ を満たす任意の x_0 に対して、それを x 座標とする C 上の点 P はただ1つ

ことを示す。まず、 $x = g(\theta) = \theta + \sin\theta$ は $-\pi < \theta < \pi$ の範囲で連続であり、(1)の結果

(2)

$-\pi < x_0 < \pi$ を満たす任意の x_0 に対して、それを x 座標とする C 上の点 P はただ1つに決まることを示す。まず、 $x=g(\theta)=\theta+\sin\theta$ は $-\pi < \theta < \pi$ の範囲で連続であり、(1)の結果より x のとり得る値の範囲は $-\pi < x < \pi$ であるから、中間値の定理より、 $-\pi < x_0 < \pi$ を満たす x_0 に対して、 $x_0=g(\theta)$ を満たす θ ($-\pi < \theta < \pi$) は少なくとも1つ存在する。また、ここで、

$x=g(\theta_1)=g(\theta_2)$ ($-\pi < \theta_1 < \theta_2 < \pi$) を満たす θ_1, θ_2 の存在を仮定すると、平均値の定理より

$$\frac{g(\theta_2)-g(\theta_1)}{\theta_2-\theta_1}=g'(\theta)\left(\theta_1<\theta<\theta_2\right)$$

を満たす θ が存在するが、(左辺)=0 である一方で、(右辺)は

$$g'(\theta)=1+\cos\theta>0$$

となるから、これは矛盾である。したがって、 $x_0=g(\theta)$ を満たす θ ($-\pi < \theta < \pi$) はただ1つ存在する。これを θ_0 とすると、点 P はただ1つの点 $(g(\theta_0), h(\theta_0))$ に定まることがわかる。

この点 P の y 座標を $y=f(x)$ と書くとき、

$$f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{h'(\theta)}{g'(\theta)}\right)\cdot\frac{d\theta}{dx}=\frac{h''(\theta)g'(\theta)-h'(\theta)g''(\theta)}{\{g'(\theta)\}^3}$$

となり、ここで

$$\begin{cases} g'(\theta)=1+\cos\theta \\ h'(\theta)=\sin\theta \end{cases}, \quad \begin{cases} g''(\theta)=-\sin\theta \\ h''(\theta)=\cos\theta \end{cases}$$

であるから、これらを代入することで

$$f''(x)=\frac{1}{(1+\cos\theta)^2}>0$$

が得られる。したがって、関数 $f(x)$ のグラフは下に凸であることがわかる。

(証明終)

【解説】

(1)

曲線 C が x 軸に接するためには、 x 軸と共有点を持つことが必要である。ここで、

$$\begin{aligned} y=0 &\Leftrightarrow 1-\cos\theta=0 \\ \therefore \theta=0 &(\because -\pi<\theta<\pi) \end{aligned}$$

であり、また、各関数の導関数は

$$\begin{cases} g'(\theta)=1+\cos\theta(>0) \\ h'(\theta)=\sin\theta \end{cases} \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

であることから、 $\theta=0$ に対応する点 $(g(0), h(0))=(0, 0)$ における接線の傾きは

$$\frac{h'(0)}{g'(0)}=\frac{0}{1+1}=0$$

となり、曲線 C は点 $(0, 0)$ において x 軸に接することがわかる。さらに、 $\textcircled{1}$ より、曲線 C の進行表は以下ようになる。

θ	$(-\pi)$	$\cdots$	0	$\cdots$	(π)
$g'(\theta)$		+	+	+	
$h'(\theta)$		-	0	+	
(x, y)	$((-\pi, 2))$	$\searrow$	$(0, 0)$	$\nearrow$	$((\pi, 2))$

したがって、曲線 C 上の点の x 座標、 y 座標の動く範囲はそれぞれ

$$-\pi < x < \pi, \quad 0 \leq y < 2$$

であることがわかる。

(2)※解答の通り

(3)

$0 < t < \pi$ とする。曲線 C の $0 \leq \theta \leq t$ に対する部分の長さ $L(t)$ は、 $\textcircled{1}$ より

$$L(t)=\int_0^t\sqrt{\{g'(\theta)\}^2+\{h'(\theta)\}^2}d\theta=\int_0^t\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}d\theta=\int_0^t\sqrt{2+2\cos\theta}d\theta$$

と立式できる。ここで、三角関数の倍角の公式より

$$2+2\cos\theta=2+2\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)=4\cos^2\frac{\theta}{2}$$

と変形できるから、 $L(t)$ は

$$L(t)=\int_0^t\left|2\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta=\left[4\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^t=4\sin\frac{t}{2}\left(\because 0<\frac{t}{2}<\frac{\pi}{2}\right)$$

と求まる。

(4)

$0 < t < \pi$ に対する曲線 C 上の点 $(g(t), h(t))$ を P_t とするとき、 P_t における C の接線 l_t の方程式は、 $\textcircled{1}$ より、 $g'(t)>0$ であることから

$$y=\frac{h'(t)}{g'(t)}\{x-g(t)\}+h(t)$$

と表せる。よって、 l_t と x 軸との交点 Q_t の x 座標は、 $\textcircled{1}$ より

$$0=\frac{h'(t)}{g'(t)}\{x-g(t)\}+h(t)\Leftrightarrow x=\frac{h'(t)g(t)-h(t)g'(t)}{h'(t)}(\because h'(t)>0)$$

$$\therefore x=t$$

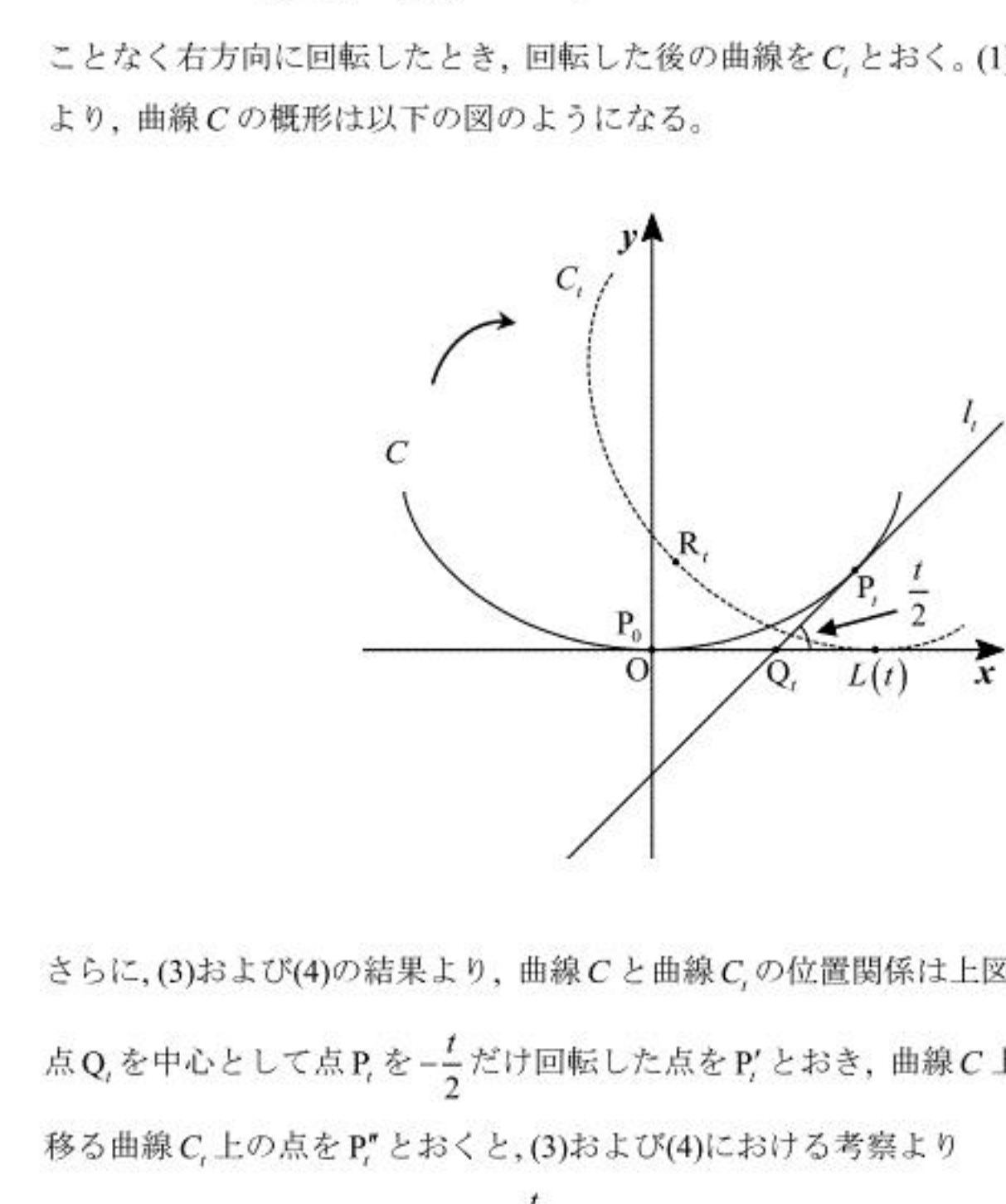
であることがわかる。また、点 $Q_t(t, 0)$ について、ベクトル $\overrightarrow{Q_tP_t}$ を成分表示すると

$$\overrightarrow{Q_tP_t}=(\sin t, 1-\cos t)=\left(2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}, 2\sin^2\frac{t}{2}\right)=2\sin\frac{t}{2}\left(\cos\frac{t}{2}, \sin\frac{t}{2}\right)$$

となるから、 $|\overrightarrow{Q_tP_t}|=2\sin\frac{t}{2}\left(\because 0<\frac{t}{2}<\frac{\pi}{2}\right)$ であり、 x 軸の正の向きとなす角は $\frac{t}{2}$ (ラジアン) であることがわかる。

(5)

曲線 C 上の点 $P_t(g(t), h(t))$ ($0 < t < \pi$) が x 軸との接点になるまで、 x 軸に接しつつ、すべることなく右方向に回転したとき、回転した後の曲線を C_t とおく。(1)の進行表および(2)の結果より、曲線 C の概形は以下の図のようになる。



さらに、(3)および(4)の結果より、曲線 C と曲線 C_t の位置関係は上図のようになる。ここで、

点 Q_t を中心として点 P_t を $-\frac{t}{2}$ だけ回転した点を P'_t とおき、曲線 C 上の点 P_t が回転した後に移る曲線 C_t 上の点を P''_t とおくと、(3)および(4)における考察より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP'_t} &= \overrightarrow{OQ_t} + \overrightarrow{Q_tP_t} = t + 2\sin\frac{t}{2} \\ \overrightarrow{OP''_t} &= \overrightarrow{L(t)} = 4\sin\frac{t}{2} \end{aligned}$$

となるから、点 P''_t は点 P'_t を x 軸方向に $-t+2\sin\frac{t}{2}$ だけ平行移動した点であることがわかる。

したがって、曲線 C_t は曲線 C を点 Q_t を中心として $-\frac{t}{2}$ (ラジアン) だけ回転させて、さらに x

軸方向に $-t+2\sin\frac{t}{2}$ だけ平行移動した図形である。よって、点 $R_t(a(t), b(t))$ も点

$P_0(g(0), h(0))$ を点 Q_t を中心として $-\frac{t}{2}$ だけ回転させて、さらに x 軸方向に $-t+2\sin\frac{t}{2}$ だけ平行移動した点であるから、 $a(t), b(t)$ を t の式で表すと

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Q_tP_0} &= (-t, 0) \\ \overrightarrow{OR_t} &= \overrightarrow{OQ_t} + \left(t\cos\left(\pi-\frac{t}{2}\right), t\sin\left(\pi-\frac{t}{2}\right)\right) + \left(-t+2\sin\frac{t}{2}, 0\right) \\ &= (t, 0) + \left(-t\cos\frac{t}{2}, t\sin\frac{t}{2}\right) + \left(-t+2\sin\frac{t}{2}, 0\right) \\ &= \left(2\sin\frac{t}{2}-t\cos\frac{t}{2}, t\sin\frac{t}{2}\right) \\ \therefore a(t) &= 2\sin\frac{t}{2}-t\cos\frac{t}{2}, \quad b(t) = t\sin\frac{t}{2} \end{aligned}$$

となる。

(6)

動点 R_t ($0 < t < \pi$) の軌跡は、(5)の結果より、次のような媒介変数表示で表される曲線である。

$$\begin{cases} a(t)=2\sin\frac{t}{2}-t\cos\frac{t}{2} \\ b(t)=t\sin\frac{t}{2} \end{cases}$$

ここで、各関数の導関数は

$$\begin{cases} a'(t)=\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}(>0) \\ b'(t)=\sin\frac{t}{2}+\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}(>0) \end{cases} \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となるから、動点 R_t ($0 < t < \pi$) の軌跡の進行表は以下ようになる。

t	(0)	$\cdots$	(π)
$a'(t)$		+	
$b'(t)$		+	
(x, y)	$(0, 0)$	$\nearrow$	$(2, \pi)$

したがって、動点 R_t ($0 < t < \pi$) の軌跡、 x 軸、および直線 $x=\alpha(=2)$ で囲まれた部分の面積は

$$\int_0^2ydx=\int_0^2b(t)\cdot\frac{dx}{dt}dt=\int_0^\pi b(t)a'(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^\pi t^2\sin^2\frac{t}{2}dt$$

と立式できる。ここで、三角関数の半角の公式より

$$\sin^2\frac{t}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos t)$$

となり、部分積分法より

$$\int_0^\pi t^2\cos tdt=\left[t^2\sin t\right]_0^\pi-2\int_0^\pi t\sin tdt=\left[2t\cos t\right]_0^\pi-2\int_0^\pi\cos tdt=-2\pi-2\left[\sin t\right]_0^\pi=-2\pi$$

となるから、求める値は

$$\int_0^2ydx=\frac{1}{2}\int_0^\pi t^2\sin^2\frac{t}{2}dt=\frac{1}{4}\int_0^\pi t^2dt-\frac{1}{4}\int_0^\pi t^2\cos tdt=\frac{1}{4}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^\pi-\frac{1}{4}(-2\pi)=\frac{\pi^3}{12}+\frac{\pi}{2}$$

となる。