

【Ⅰ】

〔解答〕

(1)	(あ)	(い)		
	$\frac{11}{12}\pi$	$\sqrt{3}+\frac{1}{2}$		
(2)	(う)	(え)		
	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$		
(3)	(お)	(か)	(き)	(く)
	$\frac{7}{2}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$

〔解説〕

(1)

与式を変形すると、

$$\begin{aligned} y &= 2\cos^2\theta - \sqrt{3}\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta \\ &= 2\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2} - \sqrt{3}\cdot\frac{\sin 2\theta}{2} - \frac{1-\cos 2\theta}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos 2\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \cos\left(2\theta - \frac{11\pi}{6}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{3}\cos\left(2\theta - \frac{11\pi}{6}\right) \qquad \cdots \cdots \text{①} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $0 \leq \theta \leq \pi$ より、 $-\frac{11\pi}{6} \leq 2\theta - \frac{11\pi}{6} \leq \frac{\pi}{6}$ である。この範囲で①が最大となる

のは、 $2\theta - \frac{11\pi}{6} = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{11\pi}{12}$ のときであり、このとき $\cos\left(2\theta - \frac{11\pi}{6}\right) = 1$ となる。以上より、

y は $\theta = \frac{11}{12}\pi$ のとき最大値 $\sqrt{3} + \frac{1}{2}$ をとる。

(2)

すべての玉を区別して考える。まず、K 君と O 君の玉の取り出し方は ${}_6C_2 \cdot {}_4C_2 (=90)$ 通りであり、いずれも同様に確からしく起きる。K 君と O 君が、それぞれ 2 個の同じ色の玉を取り出すのは、「K 君が白玉 2 個、O 君が黒玉 2 個を取る」または「K 君が黒玉 2 個、O 君が白玉 2 個を取る」場合であるから、その場合の数は

$${}_2C_2 \cdot {}_3C_2 + {}_3C_2 \cdot {}_2C_2 = 6(\text{通り})$$

である。よって、積事象 $A \cap B$ について、

$$P(A \cap B) = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$$

である。次に、K 君の玉の取り出し方は ${}_6C_2 (=15)$ 通りであり、いずれも同様に確からしく起きる。K 君が、2 個の同じ色の玉を取り出すのは、「K 君が、白玉 2 個または黒玉 2 個を取る」場合であるから、その場合の数は ${}_2C_2 + {}_3C_2 (=4)$ 通りである。よって、

$$P(A) = \frac{24}{90} = \frac{4}{15}$$

である。ここで、「6 個の玉から K 君が玉を 2 個取り出し、取り出した玉を戻さずに O 君が玉を 2 個取り出す」という操作は、「K 君と O 君が、6 個の玉から重複しないように 2 個ずつ玉を取り出す」という操作と同等である。よって、対称性より $P(A) = P(B) \left(= \frac{4}{15} \right)$ である。

以上より、和事象 $A \cup B$ について、

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{7}{15} \end{aligned}$$

となる。

(3)

$\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 0)$ 、 $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, -3)$ であるから、 $\triangle ABC$ の面積は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 \cdot |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{5 \cdot 10 - 1} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

となる。また、点 $P(x, y, z)$ について、実数 k を用いて $AP^2 = BP^2 = CP^2 = k$ とおくと

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 = k & \cdots \cdots \text{①} \\ x^2 + (y-2)^2 + z^2 = k & \cdots \cdots \text{②} \\ x^2 + y^2 + (z+3)^2 = k & \cdots \cdots \text{③} \end{cases}$$

となる。ここで、①－②より

$$\begin{aligned} (x-1)^2 - x^2 + y^2 - (y-2)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x &= 4y - 3 \\ \Leftrightarrow x &= 2y - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

である。また、②－③より

$$\begin{aligned} (y-2)^2 - y^2 + z^2 - (z+3)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 6z &= -4y - 5 \\ \Leftrightarrow z &= -\frac{2}{3}y - \frac{5}{6} \end{aligned}$$

である。したがって、実数 t を用いて、点 $P\left(2t - \frac{3}{2}, t, -\frac{2}{3}t - \frac{5}{6}\right)$ と表せ、また、

$$(x, y, z) = \left(-\frac{3}{2}, 0, -\frac{5}{6}\right) + t\left(2, 1, -\frac{2}{3}\right)$$

と表せる。ここで、 $\sqrt{2^2 + 1^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{7}{3}$ より、

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \frac{3}{7} \cdot \left(2, 1, -\frac{2}{3}\right) \\ &= \left(\frac{6}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{2}{7}\right) \end{aligned}$$

となる。

【Ⅱ】

【解答】

(1)	(あ)	(い)			
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$			
(2)	(う)	(え)			
	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$			
(3)	(お)	(か)			
	-1	$-\frac{1}{3}$			
(4)	(き)	(く)	(け)	(こ)	
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	
(5)	(さ)	(し)	(す)	(せ)	(そ)
	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$

【解説】

(1)

操作Tを n 回繰り返して終了するとき、点Pが頂点B上に置かれている確率を r_n とおく。以下、 $n \geq 2$ の場合を考える。 n 回の操作Tの後に点Pが頂点A上に置かれるのは

- [1] $n-1$ 回の操作Tの後に点Pが頂点A上にあり、確率 $\frac{1}{3}$ でそのまま残る
- [2] $n-1$ 回の操作Tの後に点Pが頂点B上にあり、確率 $\frac{1}{3}$ で頂点Aに移る

の2通りの場合がある。したがって、

$$p_n = \frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{1}{3}r_{n-1} \qquad \cdots \textcircled{1}$$

と表される。また、 n 回の操作Tの後に点Pが頂点B上に置かれるのは

$$n-1 \text{ 回の操作Tの後に点Pが頂点A上にあり、確率}\frac{2}{3}\text{で頂点Bに移る}$$

の場合に限られる。したがって、

$$r_n = \frac{2}{3}p_{n-1} \qquad \cdots \textcircled{2}$$

と表される。よって、 $n \geq 3$ のとき、①、②より、

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}p_{n-2} \\ \Leftrightarrow p_n &= \frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{2}{9}p_{n-2} \end{aligned}$$

と求まる。

(2)

漸化式 $p_n = \frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{2}{9}p_{n-2}$ の特性方程式は $x^2 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$ であり、

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{1}{3}x + \frac{2}{9} \\ \Leftrightarrow 9x^2 - 3x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3x+1)(3x-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\frac{2}{3} > -\frac{1}{3}$ より $n \geq 3$ のとき

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{2}{9}p_{n-2} \\ \Leftrightarrow p_n - \frac{2}{3}p_{n-1} &= -\frac{1}{3}\left(p_{n-1} - \frac{2}{3}p_{n-2}\right) \end{aligned}$$

と変形できる。

(3)

最初、点Pは頂点B上に置かれているから、操作(T2)の定義より

$$p_1 = q_1 = \frac{1}{3}, r_1 = 0$$

である。したがって、①より

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{1}{3}p_1 + \frac{1}{3}r_1 \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

となる。つまり、(2)の結果より $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} p_n - \frac{2}{3}p_{n-1} &= \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} \left(p_2 - \frac{2}{3}p_1\right) \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{9} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{9} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} \\ \therefore p_n - \frac{2}{3}p_{n-1} &= -\left(-\frac{1}{3}\right)^n \qquad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

と表せる。

(4)

(2)と同様にして、 $n \geq 3$ のとき

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{2}{9}p_{n-2} \\ \Leftrightarrow p_n + \frac{1}{3}p_{n-1} &= \frac{2}{3}\left(p_{n-1} + \frac{1}{3}p_{n-2}\right) \end{aligned}$$

であるから、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} p_n + \frac{1}{3}p_{n-1} &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \left(p_2 + \frac{1}{3}p_1\right) \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \\ \therefore p_n + \frac{1}{3}p_{n-1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

と表せる。③、④より、 p_{n-1} を消去して

$$\begin{aligned} p_n + 2p_n &= -\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ \Leftrightarrow 3p_n &= \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \\ \Leftrightarrow p_n &= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \qquad \cdots \textcircled{5} \end{aligned}$$

と求まる。 $p_1 = \frac{1}{3}$ より、これは $n=1$ のときも成立する。

(5)

対称性より、 n 回の操作Tの後に点Pが頂点D上に置かれる確率も q_n である。 n 回の操作Tの後、点Pは頂点A, B, C, Dのいずれかにあるから、 $n \geq 1$ について、

$$p_n + r_n + 2q_n = 1 \Leftrightarrow q_n = \frac{1 - p_n - r_n}{2}$$

である。また、②および⑤より、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{2}{3}p_{n-1} \\ &= \frac{2}{3} \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

である。 $r_1 = 0$ より、これは $n=1$ のときも成立する。以上より、 $n \geq 1$ について、

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{1 - p_n - r_n}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right\} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

となる。

【Ⅲ】

【解答】

(1)	(あ)		
	$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$		
(2)	(い)	(う)	(え)
	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	-2	$\frac{1}{4}$
(3)	(お)		
	$4\sqrt{2}$		
(4)	(か)	(き)	
	$-\frac{a}{a^2+1}$	$-\frac{a^2}{a^2+1}$	

(5)

(4)の結果より、

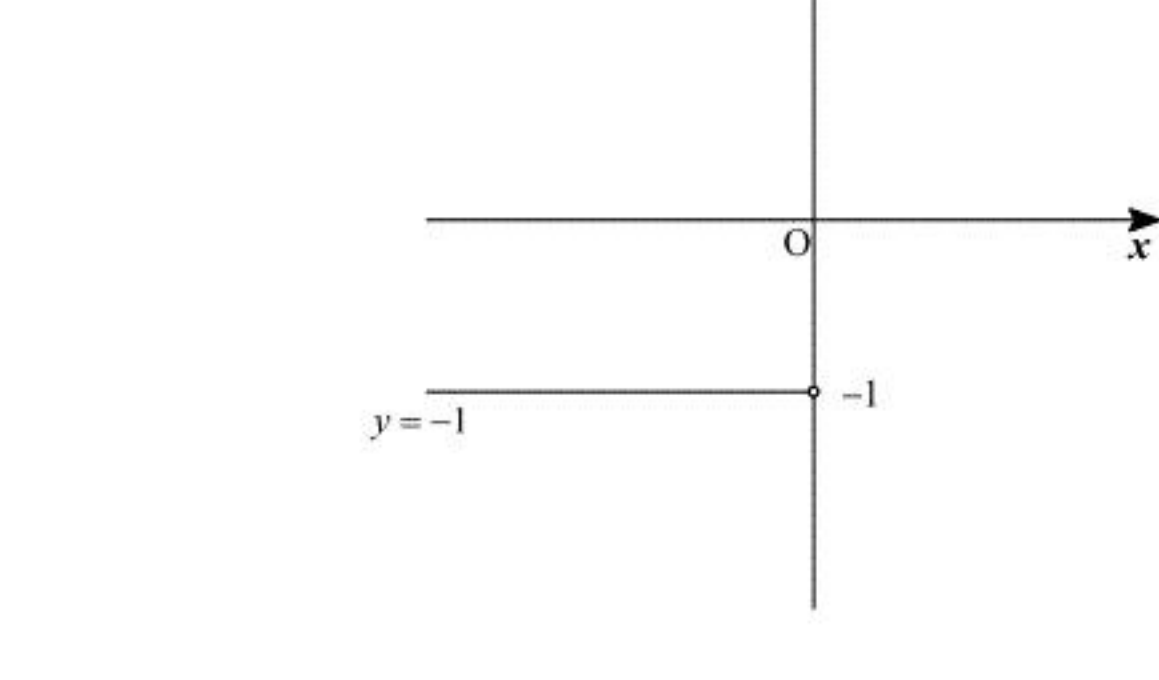
$$\left|\overline{\text{OM}}_o\right|^2=\left(-\frac{a}{a^2+1}\right)^2+\left(-\frac{a^2}{a^2+1}\right)^2=\frac{a^4+a^2}{\left(a^2+1\right)^2}=\frac{a^2}{a^2+1}$$

となるから、

$$\begin{aligned}\overline{\text{ON}}_o&=\frac{1}{\left|\overline{\text{OM}}_o\right|^2}\cdot\overline{\text{OM}}_o\\&=\frac{a^2+1}{a^2}\left(-\frac{a}{a^2+1},-\frac{a^2}{a^2+1}\right)\\&=\left(-\frac{1}{a},-1\right)\end{aligned}$$

である。 a が正の実数全体を動くとき、 $-\frac{1}{a}$ は負の実数全体をとるから、点 N_o の軌跡は直線

$y=-1$ の $x<0$ の部分となり、これを図示すると下図の実線部となる。



(答) 前図

【解説】

(1)

Oを焦点とし、直線 $y=-1$ を準線とする放物線は、点 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ を焦点、直線 $y=-\frac{1}{2}$ を準線とす

る放物線を y 軸方向に $-\frac{1}{2}$ だけ平行移動したものに相当するから、この放物線の方程式は

$$x^2=4\cdot\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$$

である。

(2)

点 P が放物線 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$ 上を動くとき、 P の座標は実数 p を用いて $\text{P}\left(p,\frac{p^2-1}{2}\right)$ と表される。

このとき、

$$\left|\overline{\text{OP}}\right|^2=p^2+\left(\frac{p^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{p^2+1}{2}\right)^2$$

であるから、点 $\text{Q}(x,y)$ は

$$\begin{aligned}(x,y)&=\frac{1}{\left|\overline{\text{OP}}\right|^2}\cdot\overline{\text{OP}}\\&=\left(\frac{2}{p^2+1}\right)^2\left(p,\frac{p^2-1}{2}\right)\\&=\left(\frac{4p}{\left(p^2+1\right)^2},\frac{2\left(p^2-1\right)}{\left(p^2+1\right)^2}\right)\end{aligned}$$

と表される。ここで、 $x(p)=\frac{4p}{\left(p^2+1\right)^2}$ 、 $y(p)=\frac{2\left(p^2-1\right)}{\left(p^2+1\right)^2}$ として、以下では $x(p)$ 、 $y(p)$ をそれぞれ

p で微分して増減を調べ、 x 、 y のとりうる値の範囲を求める。ただし、 p の定義域は実数全体であることに注意する。 $x(p)=\frac{4p}{\left(p^2+1\right)^2}$ を p で微分すると、

$$\begin{aligned}x'(p)&=\frac{4\left(p^2+1\right)^2-4p\cdot2\left(p^2+1\right)\cdot2p}{\left(p^2+1\right)^4}\\&=\frac{4\left(p^2+1\right)-16p^2}{\left(p^2+1\right)^3}\\&=\frac{4\left(1-3p^2\right)}{\left(p^2+1\right)^3}\\&=\frac{4\left(1-\sqrt{3}p\right)\left(1+\sqrt{3}p\right)}{\left(p^2+1\right)^3}\end{aligned}$$

であり、 $x'(p)=0$ のとき $p=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ である。以上より、 $x(p)$ の増減は以下のようになる。

p	...	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...
$x'(p)$	-	0	+	0	-
$x(p)$	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$

$\lim_{p\rightarrow\pm\infty}\frac{4p}{\left(p^2+1\right)^2}=0$ であるから、 x のとりうる値の範囲は $-\frac{3\sqrt{3}}{4}\leq x\leq\frac{3\sqrt{3}}{4}$ となる。次に

$y(p)=\frac{2\left(p^2-1\right)}{\left(p^2+1\right)^2}$ を y で微分すると、

$$\begin{aligned}y'(p)&=\frac{2\cdot2p\left(p^2+1\right)^2-2\left(p^2-1\right)\cdot2\left(p^2+1\right)\cdot2p}{\left(p^2+1\right)^4}\\&=\frac{4p\left(p^2+1\right)-8p\left(p^2-1\right)}{\left(p^2+1\right)^3}\\&=\frac{-4p^3+12p}{\left(p^2+1\right)^3}\\&=\frac{-4p\left(p-\sqrt{3}\right)\left(p+\sqrt{3}\right)}{\left(p^2+1\right)^3}\end{aligned}$$

であり、 $y'(p)=0$ のとき $p=0,\pm\sqrt{3}$ である。以上より、 $y(p)$ の増減は以下のようになる。

p	...	$-\sqrt{3}$	...	0	...	$\sqrt{3}$	...
$y'(p)$	+	0	-	0	+	0	-
$y(p)$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$

$\lim_{p\rightarrow\pm\infty}\frac{2\left(p^2-1\right)}{\left(p^2+1\right)^2}=0$ であるから、 y のとりうる値の範囲は $-2\leq y\leq\frac{1}{4}$ となる。

(3)

$y(p)=0$ のとき $p=\pm1$ であるから、 $y(p)$ の増減表より、 $y(p)\leq0$ となるのは $-1\leq p\leq1$ のときである。したがって、曲線 C の $y\leq0$ の部分の長さ L は、

$$L=\int_{-1}^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dp}\right)^2+\left(\frac{dy}{dp}\right)^2}dp$$

で与えられる。被積分関数について、

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(\frac{dx}{dp}\right)^2+\left(\frac{dy}{dp}\right)^2}&=\sqrt{\{x'(p)\}^2+\{y'(p)\}^2}\\&=\frac{1}{\left(p^2+1\right)^3}\sqrt{16\left(1-3p^2\right)^2+\left(-4p^3+12p\right)^2}\\&=\frac{1}{\left(p^2+1\right)^3}\sqrt{16\left(p^6+3p^4+3p^2+1\right)}\\&=\frac{4}{\left(p^2+1\right)^3}\sqrt{\left(p^2+1\right)^3}\\&=\frac{4}{\sqrt{\left(p^2+1\right)^3}}\end{aligned}$$

と変形でき、これは偶関数であるから、 $L=2\int_0^1\frac{4}{\sqrt{\left(p^2+1\right)^3}}dp$ とできる。ここで、 $p=\tan\theta$ とお

くと、 $\frac{dp}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$ であり、積分区間は以下のように対応する。

p	0	$\rightarrow$	1
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$

したがって、

$$\begin{aligned}L&=2\int_0^1\frac{4}{\sqrt{\left(p^2+1\right)^3}}dp\\&=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\tan^2\theta\right)^3}}\cdot\frac{dp}{d\theta}d\theta\\&=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\tan^2\theta\right)^3}}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta\\&=8\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta d\theta\left(\because1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}\right)\\&=8\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=4\sqrt{2}\end{aligned}$$

と求められる。

(4)

$(x,y)=\left(\frac{2}{p^2+1}\right)^2\left(p,\frac{p^2-1}{2}\right)$ が $y=ax$ を満たすとき、

$$\begin{aligned}\frac{p^2-1}{2}&=ap\\&\Leftrightarrow p^2-2ap-1=0\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}\end{aligned}$$

が成り立ち、 p の方程式①の2つの異なる実数解が直線 $y=ax$ と曲線 C の共有点の x 座標となる。①の方程式の解を p_1 、 p_2 とすると、解と係数の関係より、

$$\begin{aligned}p_1+p_2&=2a\\p_1p_2&=-1\end{aligned}$$

が成り立つ。また、① $\Leftrightarrow p^2+1=2(ap+1)$ であるから、 $(x,y)=\left(\frac{2}{p^2+1}\right)^2\left(p,\frac{p^2-1}{2}\right)$ が $y=ax$

を満たすとき、

$$(x,y)=\left(\frac{1}{ap+1}\right)^2(p,ap)$$

と表せる。以上より、点 M_a の x 座標は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left\{\frac{p_1}{\left(ap_1+1\right)^2}+\frac{p_2}{\left(ap_2+1\right)^2}\right\}&=\frac{1}{2}\cdot\frac{p_1\left(ap_2+1\right)^2+p_2\left(ap_1+1\right)^2}{\left(ap_1+1\right)^2\left(ap_2+1\right)^2}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2p_1p_2\left(p_1+p_2\right)+4ap_1p_2+p_1+p_2}{\left\{a^2p_1p_2+a\left(p_1+p_2\right)+1\right\}^2}\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2a^3-4a+2a}{\left(-a^2+2a^2+1\right)^2}\left(\because p_1+p_2=2a,\ p_1p_2=-1\right)\\&=\frac{-a^3-a}{\left(a^2+1\right)^2}\\&=-\frac{a}{a^2+1}\end{aligned}$$

と表せて、 M_a は直線 $y=ax$ 上にあるから、 M_a の座標は $\left(-\frac{a}{a^2+1},-\frac{a^2}{a^2+1}\right)$ で表される。

