

【Ⅱ】

【解答】

(1)	(あ)	(い)
	$4(n-1)$	n^2
(2)	(う)	(え)
	$4(n-2)$	$n(n-1)$
(3)	(お)	(か)
	$4(n-3)(n-2)(2n-3)$	$n^2(n-1)^2$
(4)	(き)	(く)
	$2(2n-1)$	$3n(n-1)$
(5)	(け)	(こ)
	$(n-2)(n+1)$	$6n(n-1)$

【解説】

n 枚のカードから 2 枚引くとき、引く 2 枚のカードに書かれている数字が a, b ($a < b$) であるような引き方を (a, b) で表す。

(1)

A 君と B 君のカードの引き方は全部で $({}_nC_2)^2$ 通りあり、これらは同様に確からしい。まず $n=2$ のとき、A 君も B 君もカードの引き方は $(1, 2)$ の 1 通りしかなく、どちらも必ず 1 を引くので、求める確率は 1 である。続いて、 $n \geq 3$ のときについて考える。ここで、「A 君と B 君のうち少なくとも 1 人が 1 を引く」ことの余事象は「A 君も B 君も 1 を引かない」ことである。A 君も B 君も 1 を引かない場合の数は、それぞれが 1 以外の $(n-1)$ 枚から 2 枚カードを引けばよいので $({}_{n-1}C_2)^2$ 通りとなる。したがって、A 君も B 君も 1 を引かない確率は

$$\frac{({}_{n-1}C_2)^2}{({}_nC_2)^2} = \left\{ \frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot \frac{2}{n(n-1)} \right\}^2 = \frac{(n-2)^2}{n^2}$$

である。よって、A 君と B 君のうち少なくとも 1 人が 1 を引く確率は

$$1 - \frac{(n-2)^2}{n^2} = \frac{4(n-1)}{n^2}$$

となる。ここで、 $n=2$ のとき $\frac{4(n-1)}{n^2} = 1$ であるから、上式は $n=2$ のときも成り立つ。したがって、求める確率は $\frac{4(n-1)}{n^2}$ である。

(2)

まず $n=2$ のとき、A 君も B 君もカードの引き方は $(1, 2)$ の 1 通りしかなく、A 君も B 君が共通に引くカードが必ず 2 枚になるので、求める確率は 0 である。続いて、 $n \geq 3$ のときについて考える。A 君と B 君が共通して引くカードの選び方は n 通りある。また、A 君と B 君それぞれのもう 1 枚のカードに関しては、A 君のカードは共通して引くカード以外の $n-1$ 枚から選び、B 君のカードは共通して引くカードと A 君のもう 1 枚のカード以外の $n-2$ 枚から選ぶとすると、カードの選び方は $(n-1)(n-2)$ 通りある。したがって $n \geq 3$ のときの求める確率は

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{({}_nC_2)^2} = \frac{4(n-2)}{n(n-1)}$$

である。ここで、 $n=2$ のとき $\frac{4(n-2)}{n(n-1)} = 0$ であるので、上式は $n=2$ のときも成り立つ。したがって、求める確率は $\frac{4(n-2)}{n(n-1)}$ である。

(3)

まず $n \leq 3$ のとき、A 君と B 君のどちらも必ず 2 以下のカードを引くので、求める確率は 0 である。続いて、 $n \geq 4$ のときについて考える。2 以下のカードを 1 枚以上引く人の選び方は 2 通りある。2 以下のカードを 1 枚以上引く人のカードの引き方は、 $3 \leq x \leq n$ かつ $3 \leq y \leq n$ を満たす自然数 x, y を用いて

$$(1, 2), (1, x), (2, y)$$

と表され、 $1+2 \cdot (n-2) = 2n-3$ より $(2n-3)$ 通りある。一方、2 以下のカードを引かない人のカードの引き方は 1, 2 以外の $(n-2)$ 枚から 2 枚カードを引けばよいので ${}_{n-2}C_2$ 通りとなる。したがって $n \geq 4$ のときの求める確率は

$$\frac{2 \cdot (2n-3) \cdot {}_{n-2}C_2}{({}_nC_2)^2} = \frac{2(2n-3)(n-2)(n-3) \cdot 4}{2 \cdot n^2 \cdot (n-1)^2} = \frac{4(n-3)(n-2)(2n-3)}{n^2(n-1)^2}$$

となる。ここで、 $n \leq 3$ のとき $\frac{4(n-3)(n-2)(2n-3)}{n^2(n-1)^2} = 0$ であるので、上式は $n \leq 3$ のときも成り立つ。したがって、求める確率は $\frac{4(n-3)(n-2)(2n-3)}{n^2(n-1)^2}$ である。

(4)

A 君が記録した番号と B 君が記録した番号の大きい方が一致するとき、A 君の引き方は (a, p) 、B 君の引き方は (b, p) と表すことができる。ただし、 a, b, p は $1 \leq a < p \leq n$ かつ $1 \leq b < p \leq n$ を満たす自然数である。 p を固定して考えると A 君と B 君のカードの引き方は $(p-1)^2$ 通りある。ここで、 $2 \leq p \leq n$ であることから、求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{p=2}^n (p-1)^2}{({}_nC_2)^2} &= \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2}{({}_nC_2)^2} \\ &= \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) \cdot \frac{4}{n^2(n-1)^2} \\ &= \frac{2(2n-1)}{3n(n-1)} \end{aligned}$$

となる。

(5)

まず $n=2$ のとき、A 君も B 君もカードの引き方は $(1, 2)$ の 1 通りしかないので、A 君が引く番号の小さい方は常に 1 でありこれは、B 君が引く番号の大きい方である 2 より小さくなるので、求める確率は 0 である。続いて、 $n \geq 3$ のときについて考える。A 君の引くカードのうち小さい方を k とおく。ただし、 k は $2 \leq k \leq n-1$ を満たす自然数である。このとき、A 君の引くカードのうち大きい方の選び方は $k+1$ から n までの中から 1 枚選べばよいので $(n-k)$ 通りある。一方、B 君のカードの引き方は 1 から k までの中から 2 枚選べばよいので ${}_kC_2$ 通りある。したがって、 $n \geq 3$ のときの求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{k=2}^{n-1} {}_kC_2 \cdot (n-k)}{({}_nC_2)^2} &= \frac{4}{n^2(n-1)^2} \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n-1} k(k-1)(n-k) \\ &= \frac{2}{n^2(n-1)^2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k(k-1)(n-k) \left(\because 1 \cdot (1-1) \cdot (n-1) = 0 \right) \\ &= \frac{2}{n^2(n-1)^2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \{ -k^3 + (n+1)k^2 - nk \} \\ &= \frac{2}{n^2(n-1)^2} \cdot \left\{ -\frac{1}{4}n^2(n-1)^2 + \frac{(n+1)}{6}(n-1)n(2n-1) - \frac{n}{2}n(n-1) \right\} \\ &= \frac{2}{n^2(n-1)^2} \cdot \frac{1}{12}n(n-1)\{-3n(n-1) + 2(n+1)(2n-1) - 6n\} \\ &= \frac{1}{6n(n-1)} \cdot (n^2 - n - 2) \\ &= \frac{(n-2)(n+1)}{6n(n-1)} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $n=2$ のとき $\frac{(n-2)(n+1)}{6n(n-1)} = 0$ であるので、上式は $n=2$ のときも成り立つ。

したがって、求める確率は $\frac{(n-2)(n+1)}{6n(n-1)}$ である。

【Ⅲ】

【解答】

(1)	(あ)						
	4						
(2)	(い)	(う)	(え)	(お)	(か)	(き)	(く)
	2	10	42	$4S_n+2$	$\frac{2}{3}(4^n-1)$	$\frac{2\cdot 4^n}{3}-2^n+\frac{1}{3}$	$\frac{\pi^2}{6}$

【解説】

(1)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x \text{ より,}$$
$$f(x)+f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}$$

となる。また、 $\sin 2x=2\sin x\cos x$ より、

$$af(2x)=\frac{a}{\sin^2 2x}=\frac{a}{4\sin^2 x\cos^2 x}$$

となる。したがって、与式が成り立つのは、

$$a=4$$

となるときである。

(2)

(1)の結果を利用することで、

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=1}^1 f\left(\frac{k\pi}{4}\right) \\ &= f\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2 \\ S_2 &= \sum_{k=1}^3 f\left(\frac{k\pi}{8}\right) \\ &= f\left(\frac{\pi}{8}\right)+f\left(\frac{2\pi}{8}\right)+f\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\ &= \left\{f\left(\frac{\pi}{8}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right\}+f\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 4f\left(\frac{\pi}{4}\right)+f\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 10 \\ S_3 &= \sum_{k=1}^7 f\left(\frac{k\pi}{16}\right) \\ &= f\left(\frac{\pi}{16}\right)+f\left(\frac{2\pi}{16}\right)+f\left(\frac{3\pi}{16}\right)+f\left(\frac{4\pi}{16}\right)+f\left(\frac{5\pi}{16}\right)+f\left(\frac{6\pi}{16}\right)+f\left(\frac{7\pi}{16}\right) \\ &= f\left(\frac{\pi}{16}\right)+f\left(\frac{2\pi}{16}\right)+f\left(\frac{3\pi}{16}\right)+f\left(\frac{4\pi}{16}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{16}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{16}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{16}\right) \\ &= \left\{f\left(\frac{\pi}{16}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{16}\right)\right\}+\left\{f\left(\frac{2\pi}{16}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{16}\right)\right\}+\left\{f\left(\frac{3\pi}{16}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{16}\right)\right\}+f\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 4\left\{f\left(\frac{\pi}{8}\right)+f\left(\frac{2\pi}{8}\right)+f\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right\}+f\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 4S_2+f\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 42 \end{aligned}$$

が得られる。同様にして考えると、

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} f\left(\frac{k\pi}{2^{n+2}}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{2^n-1} f\left(\frac{k\pi}{2^{n+2}}\right)+f\left(\frac{2^n\pi}{2^{n+2}}\right)+\sum_{k=2^{n+1}}^{2^{n+1}-1} f\left(\frac{k\pi}{2^{n+2}}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{2^n-1} f\left(\frac{k\pi}{2^{n+2}}\right)+f\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sum_{k=2^{n+1}}^{2^{n+1}-1} f\left(\frac{k\pi}{2^{n+2}}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{2^n-1} f\left(\frac{k\pi}{2^{n+2}}\right)+2+\sum_{k=1}^{2^n-1} f\left(\frac{2^{n+1}-k}{2^{n+2}}\pi\right) \\ &= \sum_{k=1}^{2^n-1} f\left(\frac{k\pi}{2^{n+2}}\right)+2+\sum_{k=1}^{2^n-1} f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{2^{n+2}}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{2^n-1} \left\{f\left(\frac{k\pi}{2^{n+2}}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{2^{n+2}}\right)\right\}+2 \\ &= 4\sum_{k=1}^{2^n-1} f\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right)+2 \\ &= 4S_n+2 \end{aligned}$$

と表せる。よって、

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 4S_n+2 \\ \Leftrightarrow S_{n+1}+\frac{2}{3} &= 4\left(S_n+\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

より、数列 $\left\{S_n+\frac{2}{3}\right\}$ は初項 $S_1+\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$ 、公比4の等比数列であるから、

$$\begin{aligned} S_n+\frac{2}{3} &= \frac{8}{3}\cdot 4^{n-1} \\ \therefore S_n &= \frac{2}{3}(4^n-1) \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{\tan^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \\ &= \frac{1}{\sin^2 x}-1 \\ &= f(x)-1 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^{2^n-1} g\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{2^n-1} \left\{f\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right)-1\right\} \\ &= S_n-(2^n-1) \\ &= \frac{2\cdot 4^n}{3}-2^n+\frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ において、

$$\begin{aligned} \sin \theta &< \theta < \tan \theta \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\tan^2 \theta} &< \frac{1}{\theta^2} < \frac{1}{\sin^2 \theta} \\ \Leftrightarrow g(\theta) &< \frac{1}{\theta^2} < f(\theta) \end{aligned}$$

が成立するから、 $\theta=\frac{k\pi}{2^{n+1}}(1\leq k\leq 2^n-1)$ とすると、

$$\begin{aligned} g\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right) &< \frac{4^{n+1}}{k^2\pi^2} < f\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{4^{n+1}}g\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right) &< \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{4^{n+1}}f\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

が成立する。よって、 $k=1, 2, \dots, 2^n-1$ における和について、

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{4^{n+1}}\sum_{k=1}^{2^n-1} g\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right) &< \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{4^{n+1}}\sum_{k=1}^{2^n-1} f\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{4^{n+1}}T_n &< \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{4^{n+1}}S_n \\ \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{4^{n+1}}\left(\frac{2\cdot 4^n}{3}-2^n+\frac{1}{3}\right) &< \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{4^{n+1}}\cdot \frac{2}{3}(4^n-1) \\ \Leftrightarrow \frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{\pi^2}{3\cdot 4^{n+1}} &< \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{6}-\frac{2\pi^2}{3\cdot 4^{n+1}} \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が得られる。 $n\rightarrow\infty$ の極限を考えると、

$$\begin{aligned} (\textcircled{1} \text{の最左辺}) &\rightarrow \frac{\pi^2}{6} \\ (\textcircled{1} \text{の最右辺}) &\rightarrow \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

となるため、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

となる。

【Ⅳ】

【解答】

(1)	(あ)		
	$\frac{3A}{2\sqrt{c}}$		
(2)	(い)	(う)	(え)
	$\frac{3\sqrt{2}}{2}A$	$\sqrt{c-\frac{2c^3}{9A^2}}$	$\sqrt{c-\frac{c^3}{9A^2}}$
(3)	(お)	(か)	
	$\sqrt{3}A$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	

(4)

$f(x)$ の導関数は、

$$f'(x)=-\frac{2b}{c}x$$

であるから、

$$\begin{aligned} L(c) &= \int_0^{\sqrt{c}} \sqrt{1+\{f'(x)\}^2} dx \\ &= \int_0^{\sqrt{c}} \sqrt{1+\frac{4b^2}{c^2}x^2} dx \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 $\frac{4b^2}{c^2}x^2 \geq 0$ であるから、与えられた不等式を利用すると、

$$1 \leq \sqrt{1+\frac{4b^2}{c^2}x^2} \leq 1+\sqrt{\frac{4b^2}{c^2}x^2} = 1+\frac{2b}{c}x$$

が成立する。よって、

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{c}} dx &\leq \int_0^{\sqrt{c}} \sqrt{1+\frac{4b^2}{c^2}x^2} dx \leq \int_0^{\sqrt{c}} \left(1+\frac{2b}{c}x\right) dx \\ \Leftrightarrow [x]_0^{\sqrt{c}} &\leq L(c) \leq \left[x+\frac{b}{c}x^2\right]_0^{\sqrt{c}} \\ \Leftrightarrow \sqrt{c} &\leq L(c) \leq \sqrt{c}+b \\ \Leftrightarrow 1 &\leq \frac{L(c)}{\sqrt{c}} \leq 1+\frac{3A}{2c} \quad (\because (1)) \end{aligned}$$

が成り立つ。いま、 A が定数であることに注意すると、

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \left(1+\frac{3A}{2c}\right) = 1$$

であるから、はさみうちの原理より、

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{L(c)}{\sqrt{c}} = 1$$

となる。同様にして、与えられた不等式を利用すると、

$$\frac{2b}{c}x \leq \sqrt{1+\frac{4b^2}{c^2}x^2} \leq 1+\frac{2b}{c}x$$

が成立する。よって、

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{c}} \frac{2b}{c}x dx &\leq \int_0^{\sqrt{c}} \sqrt{1+\frac{4b^2}{c^2}x^2} dx \leq \int_0^{\sqrt{c}} \left(1+\frac{2b}{c}x\right) dx \\ \Leftrightarrow \frac{b}{c}[x^2]_0^{\sqrt{c}} &\leq L(c) \leq \sqrt{c}+b \\ \Leftrightarrow b &\leq L(c) \leq \sqrt{c}+b \\ \Leftrightarrow \frac{3A}{2} &\leq \sqrt{c}L(c) \leq c+\frac{3A}{2} \quad (\because (1)) \end{aligned}$$

が成り立つ。いま、 A が定数であることに注意すると

$$\lim_{c \rightarrow +0} \left(c+\frac{3A}{2}\right) = \frac{3A}{2}$$

であるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{c \rightarrow +0} \sqrt{c}L(c) = \frac{3A}{2}$$

となる。

(証明終)

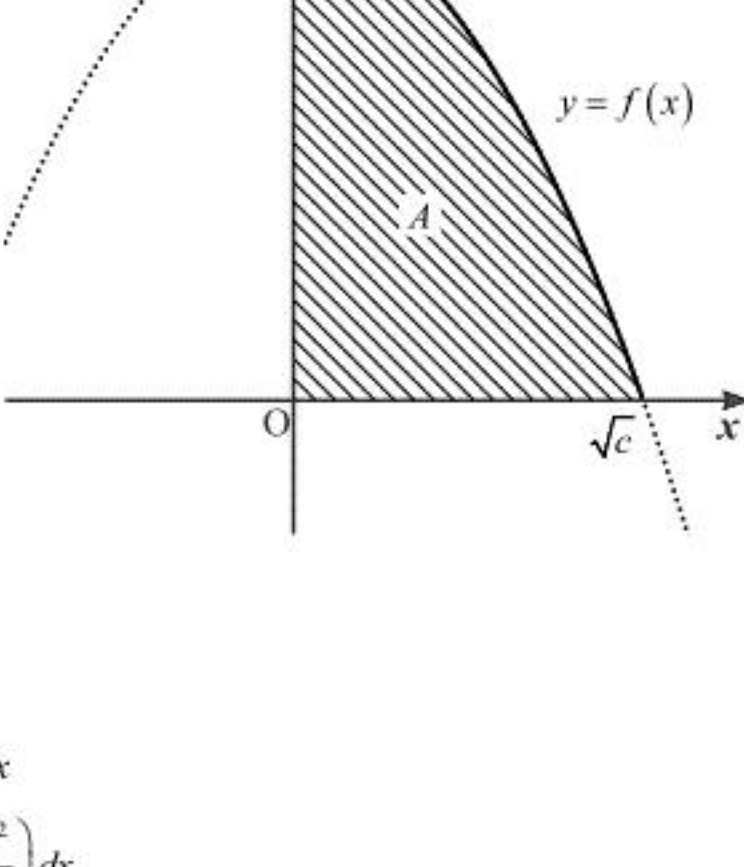
【解説】

(1)

$b>0, c>0$ であることに注意すると、

$$f(x) = -b\left(\frac{x}{\sqrt{c}}+1\right)\left(\frac{x}{\sqrt{c}}-1\right)$$

と変形できるから、 A は次図の斜線部の領域の面積である。



したがって、

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\sqrt{c}} f(x) dx \\ &= b \int_0^{\sqrt{c}} \left(1-\frac{x^2}{c}\right) dx \\ &= b \left[x-\frac{x^3}{3c}\right]_0^{\sqrt{c}} \\ &= \frac{2}{3}b\sqrt{c} \end{aligned}$$

であるから、 b を A と c の式で表すと、 $b=\frac{3A}{2\sqrt{c}}$ となる。

(2)

問題文より、

$$\begin{aligned} r(x) &= \sqrt{x^2+\{f'(x)\}^2} \\ &= \sqrt{x^2+b^2\left(1-\frac{2x^2}{c}+\frac{x^4}{c^2}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{b^2}{c^2}x^4-\left(\frac{2b^2}{c}-1\right)x^2+b^2} \\ &= \sqrt{\frac{b^2}{c^2}\left\{x^4-\left(2c-\frac{c^2}{b^2}\right)x^2\right\}+b^2} \\ &= \sqrt{\frac{b^2}{c^2}\left\{x^2-\frac{1}{2}\left(2c-\frac{c^2}{b^2}\right)\right\}^2+\left(c-\frac{c^2}{4b^2}\right)} \end{aligned}$$

と表せる。関数 $r(x)$ の区間 $0 \leq x \leq \sqrt{c}$ における増減は、 $x^2=t$ とおいた、

$$g(t) = \frac{b^2}{c^2}\left\{t-\frac{1}{2}\left(2c-\frac{c^2}{b^2}\right)\right\}^2+\left(c-\frac{c^2}{4b^2}\right) \quad (0 \leq t \leq c)$$

の増減に一致するため、以下ではこの関数の増減を調べる。ここで、 $y=g(t)$ は、軸が

$t=\frac{1}{2}\left(2c-\frac{c^2}{b^2}\right)$ である下に凸な放物線の一部であることに注意する。まず、区間 $0 \leq t \leq c$ に

おいて $g(t)$ が増加するための条件は、 $y=g(t)$ の軸が $t \leq 0$ の範囲にあることだから、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(2c-\frac{c^2}{b^2}\right) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 2b^2 &\leq c \quad (\because c>0, b^2>0) \\ \Leftrightarrow c^2-\frac{9A^2}{2} &\geq 0 \quad (\because (1)) \\ \Leftrightarrow \left(c+\frac{3}{\sqrt{2}}A\right)\left(c-\frac{3}{\sqrt{2}}A\right) &\geq 0 \\ \therefore c &\geq \frac{3\sqrt{2}}{2}A \quad (\because c>0, A>0) \end{aligned}$$

である。このとき、区間 $0 \leq x \leq \sqrt{c}$ において、関数 $r(x)$ も増加する。次に、 $0<t<c$ の範囲において $g(t)$ が最小値をとるための条件は、 $y=g(t)$ の軸が $0<t<c$ の範囲にあることだから、

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{2}\left(2c-\frac{c^2}{b^2}\right) < c \\ \Leftrightarrow 0 &< 2b^2-c < 2b^2 \quad (\because c>0, b^2>0) \\ \Leftrightarrow 0 &< c < 2b^2 \\ \Leftrightarrow 0 &< c < \frac{9A^2}{2c} \quad (\because (1)) \\ \Leftrightarrow 0 &< c^2 < \frac{9}{2}A^2 \quad (\because c>0) \\ \therefore 0 &< c < \frac{3\sqrt{2}}{2}A \quad (\because c>0, A>0) \end{aligned}$$

である。このとき、区間 $0 \leq t \leq c$ において $g(t)$ は

$$t=\frac{1}{2}\left(2c-\frac{c^2}{b^2}\right)=c-\frac{2c^3}{9A^2}$$

で最小値

$$c-\frac{c^2}{4b^2}=c-\frac{c^3}{9A^2} \quad (>0)$$

をとる。したがって、区間 $0 \leq x \leq \sqrt{c}$ において、関数 $r(x)$ は、1 点

$$x_0=\sqrt{c-\frac{2c^3}{9A^2}} \quad (\because 0<x_0<\sqrt{c})$$

において、最小値

$$r_0=\sqrt{c-\frac{c^3}{9A^2}}$$

をとる。

(3)

c が $0<c<\frac{3\sqrt{2}}{2}A$ を満たしつつ変化するとき、(2)より、 $r_0=\sqrt{c-\frac{c^3}{9A^2}}$ であるから、

$$h(c)=c-\frac{c^3}{9A^2} \quad \left(0<c<\frac{3\sqrt{2}}{2}A\right)$$

が最大となるような c を求めればよい。ただし、 A は定数である。ここで、

$$h'(c)=1-\frac{c^2}{3A^2}=-\frac{1}{3A^2}(c-\sqrt{3}A)(c+\sqrt{3}A)$$

であるから、増減表は以下のようになる。

c	(0)	...	$\sqrt{3}A$	...	$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}A\right)$
$h'(c)$		+	0	-	
$h(c)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

したがって、 $h(c)$ および r_0 は $c=\sqrt{3}A$ において最大値をとる。また、このとき、

$$\begin{aligned} r_0 &= \sqrt{\sqrt{3}A-\frac{3\sqrt{3}A^3}{9A^2}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}A} \\ x_0 &= \sqrt{\sqrt{3}A-\frac{6\sqrt{3}A^3}{9A^2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3}A} \end{aligned}$$

であるから、

$$\cos \theta = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+\{f'(x_0)\}^2}} = \frac{x_0}{r_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

である。