

【Ⅰ】

【解答】

	(あ)	(い)	(う)		
(1)	$\frac{5\sqrt{7}}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5\sqrt{3}}{14}$		
	(え)	(お)			
(2)	$\frac{\pi}{3m}$	$\frac{2}{5}$			
	(か)	(き)	(く)	(け)	(こ)
(3)	176	2	6	8	3

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}-5\overline{OA}+7\overline{OB}+8\overline{OC}&=\vec{0}より,\\5\overline{OA}&=7\overline{OB}+8\overline{OC}\\\Leftrightarrow 25\left|\overline{OA}\right|^2&=49\left|\overline{OB}\right|^2+112\overline{OB}\cdot\overline{OC}+64\left|\overline{OC}\right|^2\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、点Oは三角形ABCの外心であり、外接円の半径は1であるから、

$$\left|\overline{OA}\right|=\left|\overline{OB}\right|=\left|\overline{OC}\right|=1$$

が成り立つ。これを①式に代入により、

$$\begin{aligned}25&=49+112\overline{OB}\cdot\overline{OC}+64\\\therefore\overline{OB}\cdot\overline{OC}&=-\frac{11}{14}\end{aligned}$$

を得る。したがって、

$$\begin{aligned}\left|\overline{BC}\right|^2&=\left(\overline{OC}-\overline{OB}\right)^2\\&=\left|\overline{OB}\right|^2-2\overline{OB}\cdot\overline{OC}+\left|\overline{OC}\right|^2\\&=1-2\cdot\left(-\frac{11}{14}\right)+1\\&=\frac{25}{7}\end{aligned}$$

となり、

$$BC=\sqrt{\frac{25}{7}}=\frac{5\sqrt{7}}{7}$$

と求まる。次に、点Pは直線OA上にあるため、 $\overline{OP}$ は実数 k を用いて、

$$\overline{OP}=k\overline{OA}=\frac{7}{5}k\overline{OB}+\frac{8}{5}k\overline{OC}$$

と表せる。ここで、点Pは直線BC上にあるから、

$$\begin{aligned}\frac{7}{5}k+\frac{8}{5}k&=1\\\therefore k&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

を得る。したがって、

$$OP=\frac{1}{3}OA=\frac{1}{3}$$

と求まる。続いて、 $\overline{BC}$ と $\overline{PA}$ のなす角、すなわち $\overline{BC}$ と $\overline{OA}$ のなす角を θ ($0<\theta<\pi$) とおく

と、

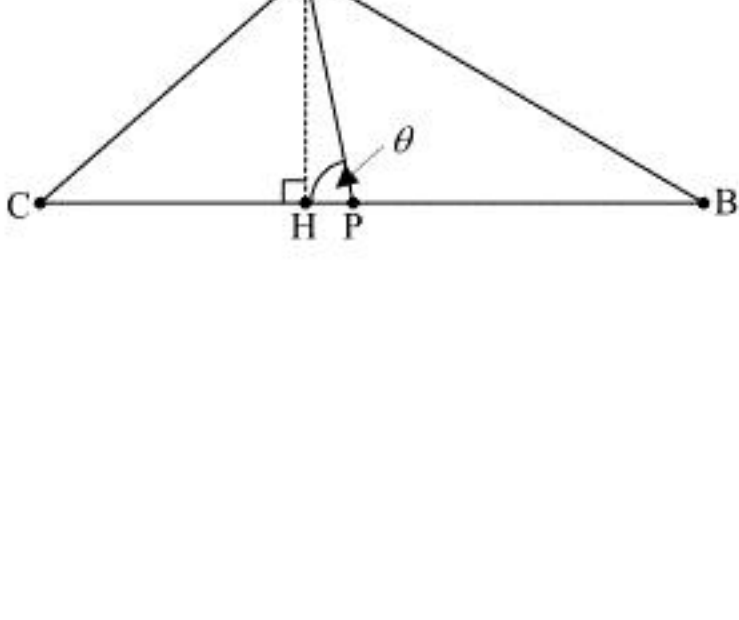
$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\overline{OA}\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{OA}\right|\left|\overline{BC}\right|}\\\&=\frac{\left(\frac{7}{5}\overline{OB}+\frac{8}{5}\overline{OC}\right)\cdot\left(\overline{OC}-\overline{OB}\right)}{1\cdot\frac{5\sqrt{7}}{7}}\\&=\frac{\sqrt{7}}{5}\left(-\frac{7}{5}\left|\overline{OB}\right|^2-\frac{1}{5}\overline{OB}\cdot\overline{OC}+\frac{8}{5}\left|\overline{OC}\right|^2\right)\\&=\frac{\sqrt{7}}{5}\left\{\left(-\frac{7}{5}\right)\cdot1-\frac{1}{5}\left(-\frac{11}{14}\right)+\frac{8}{5}\cdot1\right\}\\&=\frac{\sqrt{7}}{14}\end{aligned}$$

が成り立ち、 $0<\theta<\pi$ より $\sin\theta>0$ であるから、

$$\begin{aligned}\sin\theta&=\sqrt{1-\cos^2\theta}\\\&=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{7}}{14}\right)^2}\\\&=\frac{3\sqrt{21}}{14}\end{aligned}$$

となる。ここで、点Aから辺BCに下ろした垂線の足をHとおく。 $\sin\theta>0, \cos\theta>0$ より、

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ であることに注意すると、三角形ABC及び点P、Hの概形は以下の図のようになる。



上図より、三角形ABCの面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}BC\cdot AH&=\frac{1}{2}BC\cdot AP\sin\theta\\&=\frac{1}{2}BC\cdot\left(OA-OP\right)\sin\theta\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{5\sqrt{7}}{7}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{3\sqrt{21}}{14}\\&=\frac{5\sqrt{3}}{14}\end{aligned}$$

と求まる。

(2)

$y=x^{\alpha}-mx=x\left(x^{\alpha-1}-m\right)$ より、 $x\geq 0$ において $y=0$ となる x は $x=0, \frac{1}{m^{\frac{1}{\alpha-1}}}$ のみである。したが

って、

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^{\frac{1}{m^{\frac{1}{\alpha-1}}}}y^2dx\\&=\pi\int_0^{\frac{1}{m^{\frac{1}{\alpha-1}}}}\left(x^{2\alpha}-2mx^{\alpha+1}+m^2x^2\right)dx\\&=\pi\left[\frac{1}{2\alpha+1}\left(x^{2\alpha+1}\right)-\frac{2m}{\alpha+2}x^{\alpha+2}+\frac{m^2}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{m^{\frac{1}{\alpha-1}}}}\\&=\pi\left(\frac{1}{2\alpha+1}m^{\frac{2\alpha+1}{\alpha-1}}-\frac{2}{\alpha+2}m^{\frac{2\alpha+1}{\alpha-1}}+\frac{1}{3}m^{\frac{2\alpha+1}{\alpha-1}}\right)\\&=\pi m^{\frac{2\alpha+1}{\alpha-1}}\left(\frac{1}{2\alpha+1}-\frac{2}{\alpha+2}+\frac{1}{3}\right)\\&=\frac{2\alpha^2-4\alpha+2}{3(2\alpha+1)(\alpha+2)}\pi m^{\frac{2\alpha+1}{\alpha-1}}\\&=\frac{2(\alpha-1)^2}{3(2\alpha+1)(\alpha+2)}\pi m^{\frac{2\alpha+1}{\alpha-1}}\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\rightarrow+0}V&=\lim_{\alpha\rightarrow+0}\left\{\frac{2(\alpha-1)^2}{3(2\alpha+1)(\alpha+2)}\pi m^{\frac{2\alpha+1}{\alpha-1}}\right\}\\&=\frac{2\cdot(-1)^2}{3\cdot1\cdot2}\pi m^{-1}\\&=\frac{\pi}{3m}\end{aligned}$$

と求まる。続いて、 $m^3V=\frac{2(\alpha-1)^2}{3(2\alpha+1)(\alpha+2)}\pi m^{\frac{5\alpha-2}{\alpha-1}}$ であり、 $0<\alpha<1$ において

$\frac{2(\alpha-1)^2}{3(2\alpha+1)(\alpha+2)}\pi>0$ である。したがって、 $\frac{5\alpha-2}{\alpha-1}<0$ すなわち $\frac{2}{5}<\alpha<1$ のとき、 $m\rightarrow\infty$ と

すると m^3V は0に収束し、 $\frac{5\alpha-2}{\alpha-1}>0$ すなわち $0<\alpha<\frac{2}{5}$ のとき、 $m\rightarrow\infty$ とすると m^3V は発散

する。一方、 $\frac{5\alpha-2}{\alpha-1}=0$ すなわち $\alpha=\frac{2}{5}$ のとき、 $m\rightarrow\infty$ とすると m^3V は

$$\frac{2\left(\frac{2}{5}-1\right)^2}{3\left(2\cdot\frac{2}{5}+1\right)\left(\frac{2}{5}+2\right)}\pi=\frac{\pi}{18}$$

に収束する。したがって、求める α の値は $\alpha=\frac{2}{5}$ である。

(3)

$f(x)=x^2+kx+(k+35)=\left(x+\frac{k}{2}\right)^2-\frac{k^2}{4}+k+35$ とおく。2次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D と

おくと、

$$\begin{aligned}D&=k^2-4(k+35)\\&=(k+10)(k-14)\end{aligned}$$

である。したがって、 $D>0$ のとき、 α_k, β_k は相異なる実数であり、 $D=0$ のとき、 α_k, β_k は同一の実数である。さらに、 $D<0$ のとき、 α_k, β_k は互いに共役な複素数である。以上を踏まえると、ある整数 k が集合 A の要素であるための必要十分条件は

$$\begin{aligned}\left|k\right|&\leq 100\text{かつ}D>0\\\Leftrightarrow -100\leq k<-10, 14<k\leq 100\end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}n(A)&=\{(-11)-(-100)+1\}+(100-15+1)\\&=90+86\\&=176\end{aligned}$$

と求まる。次に、ある整数 k が集合 $A\cap B$ の要素であるための必要十分条件は

$$\begin{aligned}\left|k\right|&\leq 100\text{かつ}D>0\text{かつ}f(2)>0\text{かつ}-\frac{k}{2}>2\\\Leftrightarrow -13<k<-10\end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}n(A\cap B)&=(-11)-(-12)+1\\&=2\end{aligned}$$

と求まる。続いて、ある整数 k が集合 $\overline{A}$ の要素であるための必要十分条件は

$$\left|k\right|\leq 100\text{かつ}D\leq 0$$

である。ここで、 $k=-10$ のとき $\alpha_k=\beta_k=5$ であるから、 -10 は集合 $\overline{A}\cap B$ の要素である。一方、 $k=14$ のとき $\alpha_k=\beta_k=-7$ であるから、 14 は集合 $\overline{A}\cap B$ の要素ではない。また、 $-10<k<14$ のとき α_k, β_k は互いに共役な複素数であるから、実数 a, b を用いて

$$\begin{cases}\alpha_k=a+bi\\ \beta_k=a-bi\end{cases}(b>0)$$

とおける。このとき、解と係数の関係より、

$$\begin{cases}\alpha_k+\beta_k=-k\\\alpha_k\beta_k=k+35\end{cases}\qquad\cdots\cdots\textcircled{2}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2a=-k\\a^2+b^2=k+35\end{cases}\qquad\cdots\cdots\textcircled{3}$$

であるから、 $-10<k<14$ を満たす整数 k が集合 $\overline{A}\cap B$ の要素であるための必要十分条件は

$-\frac{k}{2}>2\Leftrightarrow k<-4$ となる。以上より、

$$\begin{aligned}n(\overline{A}\cap B)&=1+\{(-5)-(-9)+1\}\\&=6\end{aligned}$$

と求まる。ある整数 k が集合 $A\cap C$ の要素であるとき、 α_k, β_k は相異なる整数であるため、 $\alpha_k<\beta_k$ としてよい。ここで②式より

$$\begin{cases}\alpha_k+\beta_k=-k\\\alpha_k\beta_k+\alpha_k+\beta_k=35\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_k+\beta_k=-k\\(\alpha_k+1)(\beta_k+1)=36\end{cases}$$

となるため、 k が集合 $A\cap C$ の要素となるような (α_k, β_k, k) の組は

$$(\alpha_k+1, \beta_k+1)=(1, 36), (2, 18), (3, 12), (4, 9), (-36, -1), (-18, -2), (-12, -3), (-9, -4)$$

$$\therefore (\alpha_k, \beta_k, k)=(0, 35, -35), (1, 17, -18), (2, 11, -13), (3, 8, -11),$$

$$(-37, -2, 39), (-19, -3, 22), (-13, -4, 17), (-10, -5, 15)$$

の8組存在する。したがって、 $n(A\cap C)=8$ と求まる。ところで、先の議論により、ある整数 k が集合 $\overline{A}$ の要素であるための必要十分条件は

$$\left|k\right|\leq 100\text{かつ}D\leq 0$$

であり、 $k=-10, 14$ は $D=0$ の解であるため集合 $\overline{A}\cap C$ の要素である。また $-10<k<14$ のとき、③式より k が集合 $\overline{A}\cap C$ の要素となるような (a, b, k) の組は

$$\begin{cases}2a=-k\\a^2+b^2=k+35\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2a=-k\\(a+1)^2+b^2=36\end{cases}$$

より

$$(a, b, k)=(-1, 6, 2)$$

の1組である。以上より、

$$\begin{aligned}n(\overline{A}\cap C)&=2+1\\&=3\end{aligned}$$

と求まる。

【Ⅱ】

【解答】

	(あ)	(い)
(1)	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$

(2)

変量 y の平均値を $\overline{y}$ 、分散を s_y^2 とおくと、(1)と同様に $\overline{y}=\overline{x}=\frac{n+1}{2}$ 、 $s_y^2=s_x^2=\frac{n^2-1}{12}$ が成り立つ。これを踏まえると、変量 x, y の共分散 s_{xy} は

$$\begin{aligned}s_{xy} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - \overline{x} \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \overline{y} \cdot \sum_{i=1}^n x_i + n \overline{x} \cdot \overline{y} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \overline{x} \cdot \overline{y} - n \overline{x} \cdot \overline{y} + n \overline{x} \cdot \overline{y} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \overline{x} \cdot \overline{y} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{n(n+1)^2}{4} \right\}\end{aligned}$$

となる。いま、 n は奇数の2倍であるから自然数 k を用いて、

$$n=2(2k-1)=4k-2$$

と表せる。したがって、

$$\begin{aligned}s_{xy} &= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{(4k-2)(4k-1)^2}{4} \right\} \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{(2k-1)(4k-1)^2}{2} \right\}\end{aligned}$$

となる。ここで、 $2k-1, 4k-1$ はともに奇数であるから、 $\frac{(2k-1)(4k-1)^2}{2}$ は整数でない。一方、

方、 x_i, y_i は整数であるから、 $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ は整数である。したがって、

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \neq \frac{(2k-1)(4k-1)^2}{2} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{(2k-1)(4k-1)^2}{2} \neq 0$$

となるため、 $s_{xy} \neq 0$ である。

(証明終)

(3)	(う)	(え)		
	n^3-n	$d_1^2+d_2^2+\cdots+d_n^2$		
(4)	(お)	(か)	(き)	(く)
	x_i	1	$n+1-x_i$	-1

【解説】

(1)

n 個の数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ は1以上 n 以下の相異なる自然数であるから、

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \frac{n+1}{2}\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}s_x^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\overline{x})^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i^2 - \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - \frac{n^2+2n+1}{4} \\ &= \frac{n^2-1}{12}\end{aligned}$$

と求まる。

(3)

変量 x, y の標準偏差をそれぞれ s_x, s_y とおくと、(2)より

$$\begin{aligned}r &= \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} \\ &= \frac{\frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{n(n+1)^2}{4} \right\}}{\sqrt{\frac{n^2-1}{12}} \cdot \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}}\end{aligned}$$

と表せる。ここで、 $d_i = x_i - y_i$ とおくと、 $x_i y_i = \frac{x_i^2 + y_i^2 - d_i^2}{2}$ であるから、

$$\begin{aligned}r &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i^2 + y_i^2 - d_i^2}{2} \right) - \frac{(n+1)^2}{4}}{\frac{n^2-1}{12}} \\ &= \frac{\frac{6}{n} \sum_{i=1}^n (i^2 + i^2 - d_i^2) - 3(n+1)^2}{n^2-1} \\ &= \frac{\frac{6}{n} \sum_{i=1}^n 2i^2 - 3(n+1)^2 - \frac{6}{n} \sum_{i=1}^n d_i^2}{n^2-1} \\ &= \frac{\frac{6}{n} \cdot \frac{2}{6} n(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2 - \frac{6}{n} \sum_{i=1}^n d_i^2}{n^2-1} \\ &= 1 - \frac{6}{n^3-n} (d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_n^2)\end{aligned}$$

と求まる。

(4)

x_i が大きければ大きいほど、それに応じて y_i が大きいとき、 r の値は大きくなる。つまり、

$$(x_1, y_1) = (1, 1), (x_2, y_2) = (2, 2), \cdots, (x_n, y_n) = (n, n)$$

である。したがって、 $y_i = x_i$ のとき r は最大値をとる。このとき、 $d_i = x_i - y_i = 0$ であるから、

(3)より r の最大値は

$$1 - \frac{6}{n^3-n} (0+0+\cdots+0) = 1$$

である。一方、 x_i が大きければ大きいほど、それに応じて y_i が小さいとき、 r の値は小さくなる。つまり、

$$(x_1, y_1) = (1, n), (x_2, y_2) = (2, n-1), \cdots, (x_n, y_n) = (n, 1)$$

である。したがって、 $y_i = n+1-x_i$ のとき r は最小値をとる。このとき、

$d_i = x_i - y_i = 2x_i - n - 1$ であるから、(3)より r の最小値は

$$\begin{aligned}1 - \frac{6}{n^3-n} \sum_{i=1}^n d_i^2 &= 1 - \frac{6}{n^3-n} \sum_{i=1}^n (2x_i - n - 1)^2 \\ &= 1 - \frac{6}{n^3-n} \sum_{i=1}^n (2i - n - 1)^2 \\ &= 1 - \frac{6}{n^3-n} \sum_{i=1}^n \left\{ 4i^2 - 4(n+1)i + (n+1)^2 \right\} \\ &= 1 - \frac{6}{n^3-n} \cdot \left\{ \frac{4}{6} n(n+1)(2n+1) - \frac{4}{2} (n+1)n(n+1) + n(n+1)^2 \right\} \\ &= 1 - \frac{6}{n-1} \cdot \left\{ \frac{2}{3} (2n+1) - (n+1) \right\} \\ &= 1 - \frac{6}{n-1} \cdot \frac{n-1}{3} \\ &= 1\end{aligned}$$

である。

【Ⅲ】

【解答】

(1)	(あ)	(い)	(う)		
	$\frac{h^2T}{h^2-g^2}$	1	$\frac{ghT}{ h^2-g^2 }$		
(2)	(え)	(お)	(か)		
	$h>g$	$\frac{\sqrt{h^2-g^2}}{g}x+1$	$-\frac{\sqrt{h^2-g^2}}{g}x+1$		
(3)	(き)	(く)	(け)	(こ)	
	$\frac{h^2}{g^2-h^2}$	0	$\frac{h^2}{g^2}$	0	
	(さ)	(し)	(す)	(せ)	(そ)
	$g>h$	0	-1	0	1
	(た)	(ち)	(つ)	(て)	(と)
	0	-1	0	1	$\sqrt{2}$

【解説】

(1)

点Pの座標を $P(X, Y)$ とおくと、2つの塔を見上げる角度が等しくなるための必要十分条件は

$$\begin{aligned} & AP:QP=h:g \\ & \Leftrightarrow g^2AP^2=h^2QP^2 \\ & \Leftrightarrow g^2\{X^2+(Y-1)^2\}=h^2\{(X-x)^2+(Y-y)^2\} \qquad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。いま、 $(x, y)=(T, 1)$ であるから、これを①式に代入して

$$\begin{aligned} & g^2\{X^2+(Y-1)^2\}=h^2\{(X-T)^2+(Y-1)^2\} \\ & \Leftrightarrow (h^2-g^2)X^2-2h^2TX+(h^2-g^2)(Y-1)^2+h^2T^2=0 \\ & \Leftrightarrow X^2-\frac{2h^2T}{h^2-g^2}X+(Y-1)^2+\frac{h^2T^2}{h^2-g^2}=0 \quad (\because h \neq g) \\ & \Leftrightarrow \left(X-\frac{h^2T}{h^2-g^2}\right)^2+(Y-1)^2=\frac{g^2h^2T^2}{(h^2-g^2)^2} \end{aligned}$$

となる。したがって、点 $P(X, Y)$ は中心 $\left(\frac{h^2T}{h^2-g^2}, 1\right)$ 、半径 $\sqrt{\frac{g^2h^2T^2}{(h^2-g^2)^2}}=\frac{ghT}{|h^2-g^2|}$ の円周上にある。

(2)

点Pが y 軸上にあるとき、①式に $X=0$ を代入して

$$\begin{aligned} & g^2(Y-1)^2=h^2\{x^2+(Y-y)^2\} \\ & \Leftrightarrow (h^2-g^2)Y^2-2(h^2y-g^2)Y-g^2+h^2x^2+h^2y^2=0 \qquad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

が成り立つ。いま、 $h^2-g^2 \neq 0$ であることを考慮すると、 y 軸上にあるような点Pがただ1つ存在するための必要十分条件は、②式を Y についての2次方程式と見たとき、②式が重解をもつことである。ここで、②式の判別式を D_Y とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{D_Y}{4} &= (h^2y-g^2)^2-(h^2-g^2)(-g^2+h^2x^2+h^2y^2) \\ &= g^2h^2y^2-2g^2h^2y+g^2h^2-h^2(h^2-g^2)x^2 \end{aligned}$$

であるから、求める条件は、

$$\begin{aligned} & D_Y=0 \\ & \Leftrightarrow g^2h^2y^2-2g^2h^2y+g^2h^2-h^2(h^2-g^2)x^2=0 \\ & \Leftrightarrow g^2y^2-2g^2y+g^2-(h^2-g^2)x^2=0 \\ & \Leftrightarrow g^2(y-1)^2=(h^2-g^2)x^2 \end{aligned}$$

であり、これを満たす実数 (x, y) の組が存在するためには、 g, h の間に

$$\begin{aligned} & h^2-g^2 \geq 0 \\ & h>g \quad (\because h>0, g>0, h \neq g) \end{aligned}$$

が成り立っていることが必要である。この条件のもとで、点 $Q(x, y)$ は直線

$$y=\frac{\sqrt{h^2-g^2}}{g}x+1 \text{ または } y=-\frac{\sqrt{h^2-g^2}}{g}x+1 \text{ 上にある。}$$

(3)

点Pが x 軸上にあるとき、①式に $Y=0$ を代入して

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow g^2(X^2+1)=h^2\{(X-x)^2+y^2\} \\ & \Leftrightarrow (h^2-g^2)X^2-2h^2xX-g^2+h^2x^2+h^2y^2=0 \qquad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

が成り立つ。いま、 $h^2-g^2 \neq 0$ であることを考慮すると、 x 軸上にあるような点Pがただ1つ存在するための必要十分条件は、③式を X についての2次方程式と見たとき、③式が重解をもつことである。ここで、③式の判別式を D_X とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{D_X}{4} &= (h^2x)^2-(h^2-g^2)(-g^2+h^2x^2+h^2y^2) \\ &= g^2h^2x^2-h^2(h^2-g^2)y^2+g^2(h^2-g^2) \end{aligned}$$

であるから、求める条件は、

$$\begin{aligned} & D_X=0 \\ & \Leftrightarrow g^2h^2x^2-h^2(h^2-g^2)y^2+g^2(h^2-g^2)=0 \\ & \Leftrightarrow \frac{h^2}{g^2-h^2}x^2+\frac{h^2}{g^2}y^2=1 \end{aligned}$$

である。すなわち、点 $Q(x, y)$ は2次曲線 $C:\frac{h^2}{g^2-h^2}x^2+\frac{h^2}{g^2}y^2=1$ 上にある。ここで、 $\frac{h^2}{g^2}>0$

であるから、曲線 C が楕円となるのは $\frac{h^2}{g^2-h^2}>0 \Leftrightarrow g>h$ のときであり、この条件のもとで

楕円 C の焦点の座標は $\frac{g^2-h^2}{h^2}<\frac{g^2}{h^2}$ に注意すると、

$$\left(0, \pm\sqrt{\frac{g^2}{h^2}-\frac{g^2-h^2}{h^2}}\right)=(0, \pm 1)$$

と得られる。一方、 $\frac{h^2}{g^2-h^2}<0 \Leftrightarrow g<h$ のとき曲線 $C:\frac{h^2}{h^2-g^2}x^2-\frac{h^2}{g^2}y^2=-1$ は双曲線であり、

この条件のもとで双曲線 C の焦点の座標は

$$\left(0, \pm\sqrt{\frac{h^2-g^2}{h^2}+\frac{g^2}{h^2}}\right)=(0, \pm 1)$$

と得られる。さらに、曲線 C が直角双曲線となるのは

$$\begin{aligned} & \frac{h^2}{h^2-g^2}=\frac{h^2}{g^2} \\ & \Leftrightarrow h^2-g^2=g^2 \\ & \Leftrightarrow \frac{h^2}{g^2}=2 \quad (\because g>0) \\ & \therefore \frac{h}{g}=\sqrt{2} \quad \left(\because \frac{h}{g}>0\right) \end{aligned}$$

のときである。

【Ⅳ】

【解答】

(あ)	(い)	(う)
$t - \frac{e' - e^{-t}}{e' + e^{-t}} r$	$\frac{e' + e^{-t}}{2} + \frac{2}{e' + e^{-t}} r$	$0 < r \leq 1$
(え)	(お)	(か)
$\log(\sqrt{r} + \sqrt{r-1})$	$2\sqrt{r}$	$\frac{Y^2 + Y\sqrt{Y^2 - 4r} - 2r}{2}$

【解説】

点 $P\left(t, \frac{e' + e^{-t}}{2}\right)$ は点 $Q(X, Y)$ を中心とする半径 r の円周上の点であるから、

$$(t - X)^2 + \left(\frac{e' + e^{-t}}{2} - Y\right)^2 = r^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。一方 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ のとき、 $y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ であるから、曲線 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 上の点

$P\left(t, \frac{e' + e^{-t}}{2}\right)$ における接線の方程式は

$$y = \frac{e' - e^{-t}}{2}(x - t) + \frac{e' + e^{-t}}{2}$$

$$\therefore y = \frac{e' - e^{-t}}{2}x + \frac{(1 - t)e' + (1 + t)e^{-t}}{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

と与えられる。この直線は、点 $Q(X, Y)$ を中心とする半径 r の円周上の点 $P\left(t, \frac{e' + e^{-t}}{2}\right)$ における接線でもあるから、②式で表される直線と直線 PQ は垂直である。すなわち、

$$\frac{\frac{e' + e^{-t}}{2} - Y}{t - X} \cdot \frac{e' - e^{-t}}{2} = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{e' + e^{-t}}{2} - Y = -\frac{2}{e' - e^{-t}}(t - X) \quad \cdots \textcircled{3}$$

が成り立つ。①式と③式から Y を消去すると、

$$(t - X)^2 + \left\{-\frac{2}{e' - e^{-t}}(t - X)\right\}^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{4}{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}\right)(t - X)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{e' + e^{-t}}{e' - e^{-t}}\right)^2 (t - X)^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow (t - X)^2 = \left(\frac{e' - e^{-t}}{e' + e^{-t}}r\right)^2$$

$$\Leftrightarrow t - X = \frac{e' - e^{-t}}{e' + e^{-t}}r \quad (\because X < t, t > 0)$$

$$\therefore X = t - \frac{e' - e^{-t}}{e' + e^{-t}}r$$

が得られる。さらにこれを③式に代入して、

$$\frac{e' + e^{-t}}{2} - Y = -\frac{2}{e' - e^{-t}}\left\{t - \left(t - \frac{e' - e^{-t}}{e' + e^{-t}}r\right)\right\}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e' + e^{-t}}{2} - Y = -\frac{2}{e' + e^{-t}}r$$

$$\therefore Y = \frac{e' + e^{-t}}{2} + \frac{2}{e' + e^{-t}}r$$

と求める。ここで、 $X(t) = t - \frac{e' - e^{-t}}{e' + e^{-t}}r$ 、 $Y(t) = \frac{e' + e^{-t}}{2} + \frac{2}{e' + e^{-t}}r$ とおいて、すべての $t > 0$ で

$X(t) > 0$ となるための r の条件を考える。このとき、

$$X(t) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r}t > \frac{e' - e^{-t}}{e' + e^{-t}} \quad (\because r > 0)$$

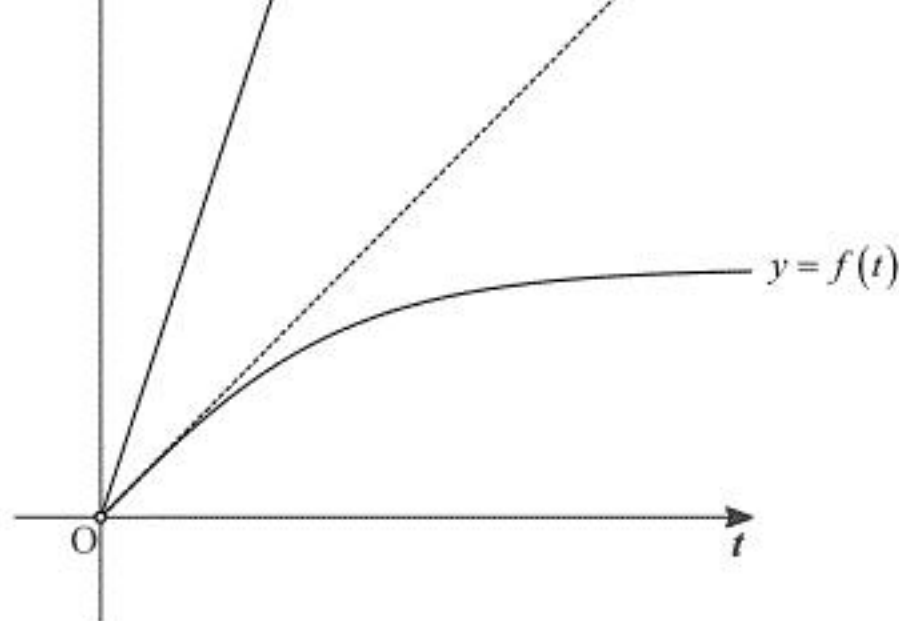
であるから、すべての $t > 0$ で $y = \frac{1}{r}t$ のグラフが $y = \frac{e' - e^{-t}}{e' + e^{-t}}$ のグラフより上側にあるための r

の条件を考えればよい。そこで、 $f(t) = \frac{e' - e^{-t}}{e' + e^{-t}}$ とおくと、

$$f'(t) = \frac{(e' + e^{-t})^2 - (e' - e^{-t})^2}{(e' + e^{-t})^2} = \frac{4}{(e' + e^{-t})^2} > 0$$

$$f''(t) = -\frac{8(e' - e^{-t})}{(e' + e^{-t})^3} < 0 \quad (\because t > 0)$$

となるから、 $y = f(t)$ のグラフは以下のようになる。



上図と $\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = 0$ 、 $\lim_{t \rightarrow +0} f'(t) = 1$ であることから、求める r の条件は、

$$\frac{1}{r} \geq 1 \Leftrightarrow 0 < r \leq 1$$

である。一方、 $r > 1$ のとき

$$Y'(t) = \frac{e' - e^{-t}}{2} + \frac{-2(e' - e^{-t})}{(e' + e^{-t})^2}r$$

$$= \frac{(e' - e^{-t})\{(e' + e^{-t})^2 - 4r\}}{2(e' + e^{-t})^2}$$

$$= \frac{(e' - e^{-t})(e' + e^{-t} + 2\sqrt{r})(e' + e^{-t} - 2\sqrt{r})}{2(e' + e^{-t})^2}$$

であるから、 $Y'(t) = 0$ を満たす t は

$$Y'(t) = 0$$

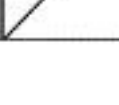
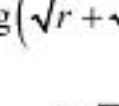
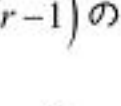
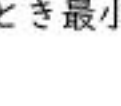
$$\Leftrightarrow e' + e^{-t} - 2\sqrt{r} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{2t} - 2\sqrt{r}e^t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow e^t = \sqrt{r} \pm \sqrt{r-1} \quad (\because r > 1)$$

$$\therefore t = \log(\sqrt{r} + \sqrt{r-1}) \quad (\because t > 0)$$

である。したがって、 $Y(t)$ の $t > 0$ における増減表は以下のようになる。

t	(0)	...	$\log(\sqrt{r} + \sqrt{r-1})$	...
$Y'(t)$		-	0	+
$Y(t)$			$Y(\log(\sqrt{r} + \sqrt{r-1}))$	

増減表より、 $Y(t)$ は $t = \log(\sqrt{r} + \sqrt{r-1})$ のとき最小値

$$Y(\log(\sqrt{r} + \sqrt{r-1})) = \frac{2\sqrt{r}}{2} + \frac{2}{2\sqrt{r}} \cdot r = 2\sqrt{r}$$

をとる。さらに $\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + 1$ は t を用いて

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + 1 = \left(\frac{dY}{dt} \cdot \frac{dt}{dX}\right)^2 + 1$$

$$= \left(\frac{Y'(t)}{X'(t)}\right)^2 + 1$$

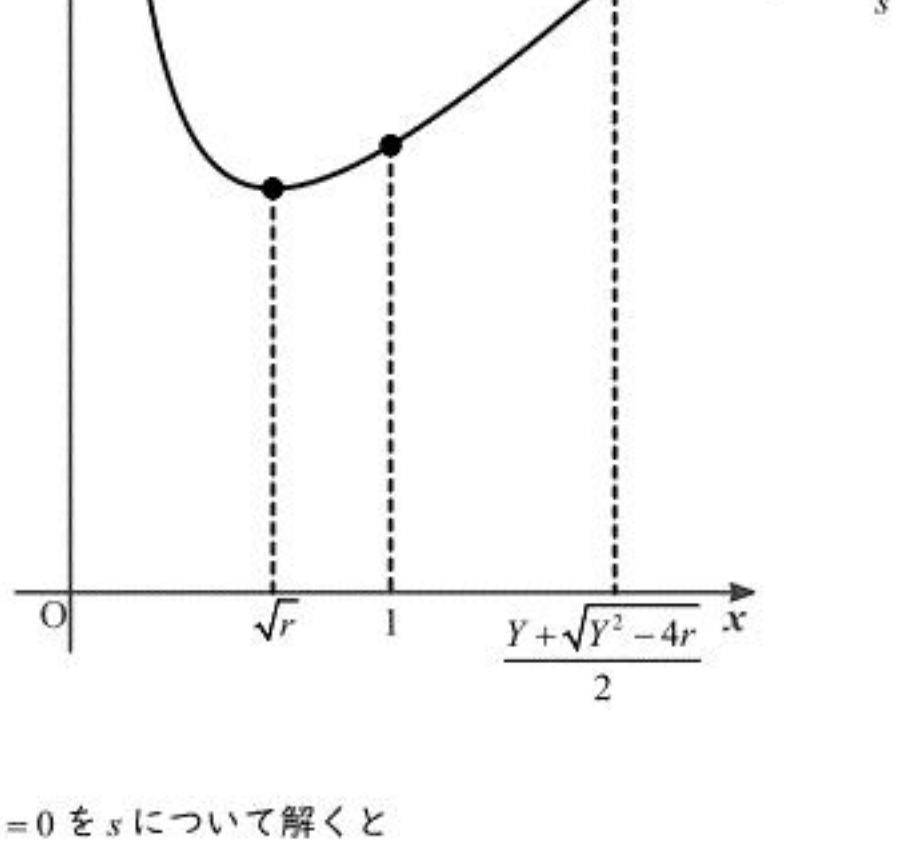
$$= \left[\frac{(e' - e^{-t})\{(e' + e^{-t})^2 - 4r\}}{2(e' + e^{-t})^2} \cdot \frac{(e' + e^{-t})^2}{(e' + e^{-t})^2 - 4r}\right]^2 + 1$$

$$= \left(\frac{e' - e^{-t}}{2}\right)^2 + 1$$

$$= \left(\frac{e' + e^{-t}}{2}\right)^2$$

と表せる。ここで、 $\frac{e' + e^{-t}}{2} = s$ とおく。このとき、 $s > 1$ である。また、 $y = x + \frac{r}{x}$ を xy 平面に

図示すると下図となる。



$Y = s + \frac{r}{s} \Leftrightarrow s^2 - Ys + r = 0$ を s について解くと

$$s = \frac{Y \pm \sqrt{Y^2 - 4r}}{2}$$

となり、

$$s = \frac{Y \pm \sqrt{Y^2 - 4r}}{2}$$

のみが $r \leq 1 < s$ を満たす。したがって、

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + 1 = s^2$$

$$= \left(\frac{Y + \sqrt{Y^2 - 4r}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{Y^2 + Y\sqrt{Y^2 - 4r} - 2r}{2}$$

と求める。