

【Ⅱ】

【解答】

(1)	あ	い
	$\frac{{}_k\mathrm{C}_i}{2^k}$	$\frac{3n}{4(2n-1)}$
(2)	う	え
	$\frac{n+1}{n^2}$	$\frac{4(n-1)}{n(n+1)}$
(3)	お	
	$\frac{2(n-1)(n-2)(3n^2-9n+8)}{n^6}$	
(4)	か	
	$\frac{6(n-3)}{n^2(n-1)}$	

【解説】

(1) 全事象は ${}_n\mathrm{C}_n$ 通りであり、これらは全て同様に確からしく起こる。袋 A に赤玉が i 個入るとき、白玉は $(n-i)$ 個入るので、袋 A に赤玉が i 個入るのは $({}_k\mathrm{C}_i\cdot {}_{2n-k}\mathrm{C}_{n-i})$ 通りである。よって、

$$\begin{aligned} p(n,k,i) &= \frac{{}_k\mathrm{C}_i\cdot {}_{2n-k}\mathrm{C}_{n-i}}{{}_n\mathrm{C}_n} \\ &= {}_k\mathrm{C}_i\cdot \frac{(2n-k)!}{(2n)!}\cdot \frac{\{(n)!\}^2}{(n-i)!\cdot (n-k+i)!} \\ &= {}_k\mathrm{C}_i\cdot \frac{\{n(n-1)\cdots (n-i+1)\}\{n(n-1)\cdots (n-k+i+1)\}}{2n(2n-1)\cdots (2n-k+1)} \qquad \cdots \textcircled{1} \\ &= {}_k\mathrm{C}_i\cdot \frac{\left\{1\cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots \left(1-\frac{i-1}{n}\right)\right\}\left\{1\cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots \left(1-\frac{k-i+1}{n}\right)\right\}}{2\left(2-\frac{1}{n}\right)\cdots \left(2-\frac{k-1}{n}\right)} \end{aligned}$$

であるので、

$$\lim_{n\rightarrow \infty} p(n,k,i)=\frac{{}_k\mathrm{C}_i}{2^k}$$

となる。①より、

$$\begin{aligned} p(n,3,1) &= {}_3\mathrm{C}_1\cdot \frac{n\cdot n(n-1)}{2n(2n-1)(2n-2)} \\ &= \frac{3(n-1)}{4(2n-1)} \end{aligned}$$

となる。

(2) 以下、操作 T を経て A の袋の赤玉の数が a 個から b 個に変化する事象を $A_{a\rightarrow b}$ ($a, b=1, 2, 3$) とし、 $A_{a\rightarrow b}$ が起こる確率を $P(A_{a\rightarrow b})$ とする。A, B の袋からそれぞれ 1 個選ぶときの全事象は n^2 通りであり、これらは全て同様に確からしく起こる。 $A_{1\rightarrow 1}$ となる場合は A, B の袋でそれぞれ同じ色を選んだときより、

$$P(A_{1\rightarrow 1})=\frac{1\cdot 2+(n-1)(n-2)}{n^2}=\frac{n^2-3n+4}{n^2}$$

となる。このあとに A の袋から赤玉を選ぶ確率は $\frac{1}{n}$ である。また、 $A_{1\rightarrow 2}$ となる場合は A の袋で白玉を B の袋で赤玉を選んだときより、

$$P(A_{1\rightarrow 2})=\frac{(n-1)\cdot 2}{n^2}=\frac{2(n-1)}{n^2}$$

となる。このあとに A の袋から赤玉を選ぶ確率は $\frac{2}{n}$ である。したがって、A の袋から赤玉を選ぶ確率は

$$\frac{n^2-3n+4}{n^2}\cdot \frac{1}{n}+\frac{2(n-1)}{n^2}\cdot \frac{2}{n}=\frac{n^2+n}{n^3}=\frac{n+1}{n^2}$$

となる。また、赤玉を取り出したとき、袋 A に赤玉が 2 個入っていた条件付き確率は

$$\frac{\frac{2(n-1)}{n^2}\cdot \frac{2}{n}}{\frac{n+1}{n^2}}=\frac{4(n-1)}{n(n+1)}$$

となる。

(3) 袋 B について事象 $B_{a\rightarrow b}$ を事象 $A_{a\rightarrow b}$ と同様に定める。袋 A に入っている赤玉の個数は 1 個から 0, 1, 2 個に変化するので、

$$P(A_{1\rightarrow 0})=1-\frac{n^2-3n+4}{n^2}-\frac{2(n-1)}{n^2}=\frac{n-2}{n^2}$$

となる。ここで、袋 A と袋 B にはともに n 個の玉が入っており、A, B の袋には対称性がある。 $A_{2\rightarrow 2}$ となるとき、 $B_{1\rightarrow 1}$ となるので、(2) と対称性より

$$P(A_{2\rightarrow 2})=P(B_{1\rightarrow 1})=\frac{n^2-3n+4}{n^2}$$

となる。また、 $A_{2\rightarrow 3}$ となるとき、 $B_{1\rightarrow 0}$ となるので、

$$P(A_{2\rightarrow 3})=P(B_{1\rightarrow 0})=\frac{n-2}{n^2}$$

となる。ここで、 $A_{3\rightarrow 3}$ となるとき、B の袋では必ず白玉を選ぶので、A の袋も白玉を選ぶ。よって、

$$P(A_{3\rightarrow 3})=\frac{n-3}{n}$$

となる。したがって、操作 T を 3 回行った後、袋 A に赤玉が 3 個入っているとき、1, 2, 3 回目のうち 1 回は袋 A の赤玉の個数が変化せず、残り 2 回は袋 A の赤玉の個数が 1 個増えるので、袋 A に赤玉が 3 個入っている確率は

$$\begin{aligned} &P(A_{1\rightarrow 1})P(A_{1\rightarrow 2})P(A_{2\rightarrow 3})+P(A_{1\rightarrow 2})P(A_{2\rightarrow 2})P(A_{2\rightarrow 3})+P(A_{1\rightarrow 2})P(A_{2\rightarrow 3})P(A_{3\rightarrow 3}) \\ &= \frac{n^2-3n+4}{n^2}\cdot \frac{2(n-1)}{n^2}\cdot \frac{n-2}{n^2}+\frac{2(n-1)}{n^2}\cdot \frac{n^2-3n+4}{n^2}\cdot \frac{n-2}{n^2}+\frac{2(n-1)}{n^2}\cdot \frac{n-2}{n^2}\cdot \frac{n-3}{n} \\ &= \frac{2(n-1)(n-2)(3n^2-9n+8)}{n^6} \end{aligned}$$

となる。

(4) A, B の袋からそれぞれ 3 個選ぶときの全事象は $({}_nC_3)^2$ 通りであり、これらは全て同様に確からしく起こる。条件を満たす場合は、A の袋で白玉を 3 個、B の袋で赤玉を 2 個、白玉を 1 個選んだときより、求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_3\cdot ({}_2\mathrm{C}_2\cdot {}_{n-2}\mathrm{C}_1)}{({}_nC_3)^2} &= \frac{\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}\cdot (n-2)}{\left\{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\right\}^2} \\ &= \frac{6(n-3)}{n^2(n-1)} \end{aligned}$$

となる。

【Ⅲ】

【解答】

(1)	あ	い		
	$(x-s)\cos\alpha-(y-t)\sin\alpha+s$	$(x-s)\sin\alpha+(y-t)\cos\alpha+t$		
(2)	う	え	お	か
	時計回り	2β	反時計回り	β
(3)	き			
	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{(a-b)^2}=1$			
(4)	く	け		
	2	$a(1+\cos\theta)$		

【解説】

(1) 以下、複素数平面上で考える。点Pを点Tを中心に反時計回りに α だけ回転させた点が点P'より

$$(x'+y'i)-(s+ti)=(\cos\alpha+i\sin\alpha)\{(x+yi)-(s+ti)\}$$

が成り立つから、

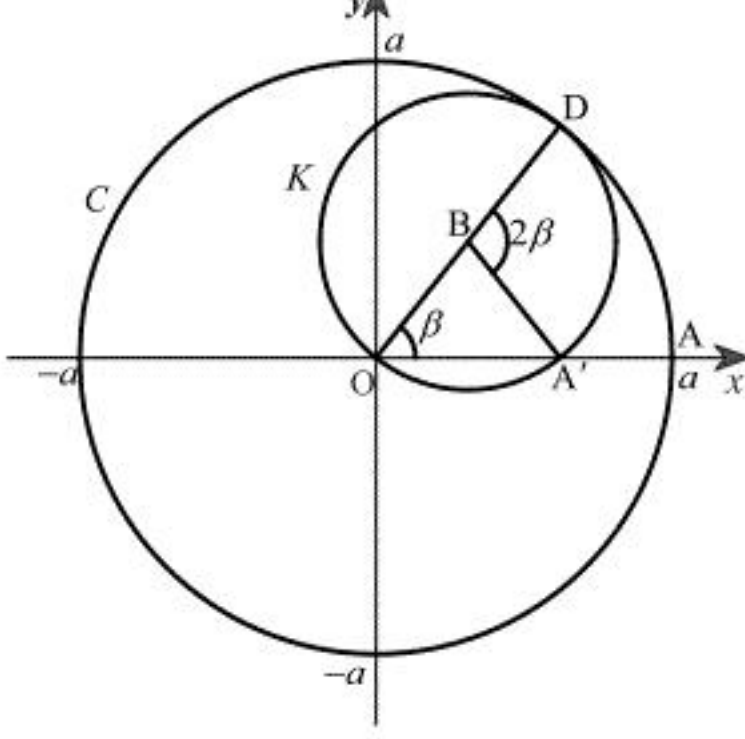
$$\begin{aligned} x'+y'i &= (\cos\alpha+i\sin\alpha)\{(x-s)+(y-t)i\}+s+ti \\ &= \{(x-s)\cos\alpha-(y-t)\sin\alpha+s\}+\{(x-s)\sin\alpha+(y-t)\cos\alpha+t\}i \end{aligned}$$

となるので、P'($(x-s)\cos\alpha-(y-t)\sin\alpha+s$, $(x-s)\sin\alpha+(y-t)\cos\alpha+t$)である。

(2) 点D($a\cos\beta$, $a\sin\beta$)とし、点A'を最初に点Aに接していた円K上の点とする。弧ADと弧A'Dの弧の長さは等しく、ADの弧の長さは $a\beta$ となる。よって、

$$\frac{a}{2}\cdot\angle DBA'=a\beta\leftrightarrow\angle DBA'=2\beta$$

となる。また、円Kと円Cの接点が反時計回りに動くとき、点A'は点Bを中心に時計回りに動くので、円Kを回転させると次の図のようになる。



したがって、円Kに対するこの操作は、点B($\frac{a}{2}$, 0)を中心として、円Kを時計回りに角 2β だけ回転させることと、原点Oを中心として、円Kを反時計回りに角 β だけ回転させることを続けて行うことに同等である。

(3) 円Kと円Cの接点が点D($a\cos\beta$, $a\sin\beta$)となったとき、点Q(b , 0)が移動した点を点U(x , y)とする。(2)より点Uは点Qを点Bを中心として、反時計回りに角 -2β だけ回転させること、原点Oを中心として、反時計回りに角 β だけ回転させることを続けて行った点である。点Qを点Bを中心として、反時計回りに角 -2β だけ回転させた点を(x' , y')とすると、

(1)より

$$\begin{cases} x'=\left(b-\frac{a}{2}\right)\cos(-2\beta)+\frac{a}{2}=\left(b-\frac{a}{2}\right)\cos 2\beta+\frac{a}{2} \\ y'=\left(b-\frac{a}{2}\right)\sin(-2\beta)=-\left(b-\frac{a}{2}\right)\sin 2\beta \end{cases}$$

となるので

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x=x'\cos\beta-y'\sin\beta \\ y=x'\sin\beta+y'\cos\beta \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x=\left\{\left(b-\frac{a}{2}\right)\cos 2\beta+\frac{a}{2}\right\}\cos\beta-\left\{-\left(b-\frac{a}{2}\right)\sin 2\beta\right\}\sin\beta \\ y=\left\{\left(b-\frac{a}{2}\right)\cos 2\beta+\frac{a}{2}\right\}\sin\beta+\left\{-\left(b-\frac{a}{2}\right)\sin 2\beta\right\}\cos\beta \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x=\left(b-\frac{a}{2}\right)(\cos 2\beta\cos\beta+\sin 2\beta\sin\beta)+\frac{a}{2}\cos\beta \\ y=\left(b-\frac{a}{2}\right)(\cos 2\beta\sin\beta-\sin 2\beta\cos\beta)+\frac{a}{2}\sin\beta \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x=\left(b-\frac{a}{2}\right)\cos\beta+\frac{a}{2}\cos\beta=b\cos\beta \\ y=-\left(b-\frac{a}{2}\right)\sin\beta+\frac{a}{2}\sin\beta=(a-b)\sin\beta \end{cases} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{cases} \cos\beta=\frac{x}{b}(\because b\neq 0) \\ \sin\beta=\frac{y}{a-b}(\because a-b\neq 0) \end{cases}$$

となるので、 $\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$ から

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{(a-b)^2}=1$$

となる。

(4) 円Kと円Cの接点を点E($\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos\varphi$, $\frac{a}{2}\sin\varphi$)、点A''を最初に点Aに接していた円C上の点、移動した後の円Cの中心をO'、点Rの移動後の点をR'とする。AEとA''Eの弧の長さは等しく、AEの弧の長さは $\frac{a\varphi}{2}$ となる。よって、

$$a\cdot\angle EO'A''=\frac{a\varphi}{2}\leftrightarrow\angle EO'A''=\frac{\varphi}{2}$$

となる。したがって、O'を通りx軸に平行な直線と直線O'A''のなす角は

$$\varphi-\frac{\varphi}{2}=\frac{\varphi}{2}$$

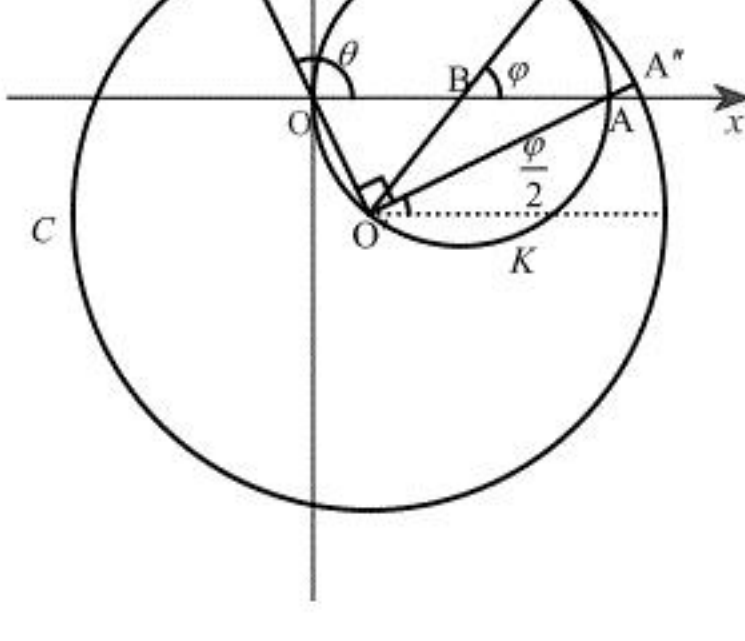
となる。回転によって、角度は保存されるので、

$$\angle ROA=\angle R'O'A''=\frac{\pi}{2}$$

となる。したがって、

$$\theta=\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}$$

となる。また、円Kと円Cの接点が反時計回りに動くとき、点A''は点O'を中心に時計回りに動くので、円Kを回転させると次の図のようになる。



(2)より点R'(x , y)は点Rを点Oを中心として、反時計回りに角 $\frac{\varphi}{2}$ だけ回転させることと、点Bを中心として、反時計回りに角 $(-\varphi)$ だけ回転させることを続けて行った点である。したがって、点Rがもとの位置に戻るのは、 $\frac{\varphi}{2}$, φ がともに 2π の整数倍となるときであるので、はじめてもとの位置に戻るのは $\varphi=4\pi$ のときである。つまり、2つの円の接点が円Kを2回転したときである。点Rを点Oを中心として、反時計回りに角 $\frac{\varphi}{2}$ だけ回転させた点を(x' , y')とすると、(1)より

$$\begin{cases} x'=-a\sin\left(-\frac{\varphi}{2}\right)=a\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\ y'=a\cos\left(-\frac{\varphi}{2}\right)=a\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{cases}$$

となる。また、(1)より

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x=\left\{a\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\frac{a}{2}\right\}\cos\varphi-a\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi+\frac{a}{2} \\ y=\left\{a\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\frac{a}{2}\right\}\sin\varphi+a\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\cos\varphi \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x=-a\left\{\sin\varphi\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\cos\varphi\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right\}-\frac{a}{2}\cos\varphi+\frac{a}{2} \\ y=a\left\{\cos\varphi\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\sin\varphi\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right\}-\frac{a}{2}\sin\varphi \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x=-a\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\frac{a}{2}\cos\varphi+\frac{a}{2} \\ y=a\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\frac{a}{2}\sin\varphi \end{cases} \end{aligned}$$

となる。この点がR'($r\cos\theta$, $r\sin\theta$)に一致するので、

$$\begin{aligned} r^2 &= \left\{-a\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\frac{a}{2}\cos\varphi+\frac{a}{2}\right\}^2+\left\{a\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\frac{a}{2}\sin\varphi\right\}^2 \\ &= a^2\left[\frac{3}{2}-\left\{\sin\varphi\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\cos\varphi\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right\}-\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\frac{\cos\varphi}{2}\right] \\ &= a^2\left[\frac{3}{2}-2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left\{1-2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right\}\right] \\ &= a^2\left\{1-2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right\} \\ &= a^2\left\{1-\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right\}^2 \\ &= a^2\left\{1+\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 \\ &= a^2(1+\cos\theta)^2\left(\because\theta=\frac{\pi}{2}+\frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned}$$

となるので、

$$r=a(1+\cos\theta)$$

となる。

【Ⅳ】

【解答】

あ	い	う	え	お	か
$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{\frac{2b-1}{6}}$	$\sqrt{\frac{2b-1}{6}}$	$3\left(\frac{a}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}$	$(2a)^{\frac{1}{3}}$	$\frac{3\sqrt{3}-1}{2}$

【解説】

$g(x)=(x-a)^2+(x^2-b)^2$ より

$$g'(x)=2(x-a)+2(x^2-b)\cdot 2x$$

$$=4x^3-2(2b-1)x-2a$$

$$g''(x)=12x^2-2(2b-1)$$

となり、 $y=g(x)$ のグラフが区間 $(-\infty, \infty)$ において下に凸となる条件は $g''(x) \geq 0$ が任意の x で成立することより

$$-2(2b-1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow b \leq \frac{1}{2}$$

となる。 $b > \frac{1}{2}$ のとき、 $g''(x)=0$ となる x は 2 つ存在し、どちらの解でも、その前後で $g''(x)$ は符号が変化するので、 $g''(x)=0$ を満たす x は $y=g(x)$ の変曲点の x 座標となる。変曲点の x 座標は

$$g''(x)=0$$

$$\Leftrightarrow 12x^2-2(2b-1)=0$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{2b-1}{6}}$$

となる。また、 $y=g(x)$ が極小となる x がただ 1 つのとき、 $g'(x)$ の符号が 1 度だけ負から正に変化する。

[1] $b \leq \frac{1}{2}$ のとき

常に $g''(x) \geq 0$ が成り立つので、 $g'(x)$ は単調に増加し、方程式 $g'(x)=0$ は実数解をただ 1 つもつ。この解の値の前後で $g'(x)$ の符号は負から正に変化するので、 $g(x)$ は極小値を 1 つだけもつ。

[2] $b > \frac{1}{2}$ のとき

$g'(x)$ は $x=-\sqrt{\frac{2b-1}{6}}, \sqrt{\frac{2b-1}{6}}$ の前後で符号が変化し、それぞれ極大、極小となる。 $g'(x)$ の 2 つの極値が同符号であるとき、 $g'(x)$ の符号が負から正に変化する点は 1 つだけであり、 $g(x)$ の極小値は 1 つである。したがって、満たすべき条件は

$$g'\left(-\sqrt{\frac{2b-1}{6}}\right)g'\left(\sqrt{\frac{2b-1}{6}}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{4\left(-\sqrt{\frac{2b-1}{6}}\right)^3+2(2b-1)\sqrt{\frac{2b-1}{6}}-2a\right\}\left\{4\left(\sqrt{\frac{2b-1}{6}}\right)^3-2(2b-1)\sqrt{\frac{2b-1}{6}}-2a\right\} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{8\left(\sqrt{\frac{2b-1}{6}}\right)^3-2a\right\}\left\{-8\left(\sqrt{\frac{2b-1}{6}}\right)^3-2a\right\} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{a-4\left(\sqrt{\frac{2b-1}{6}}\right)^3\right\}\left\{a+4\left(\sqrt{\frac{2b-1}{6}}\right)^3\right\} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{|a|}{4} \geq \left(\sqrt{\frac{2b-1}{6}}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \geq \frac{2b-1}{6} \left(\because \frac{|a|}{4} \geq 0, \frac{2b-1}{6} > 0\right)$$

$$\Leftrightarrow b \geq 3\left(\frac{a}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}$$

となる。

以上、[1]、[2]より、 $F(a)=3\left(\frac{a}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}$ となる。 $b=F(a)$ のとき、

$$g'(x)=4x^3-6\left(\frac{a^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}x-2a$$

$$=4\left\{x+\left(\frac{a}{4}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}^2\left\{x-(2a)^{\frac{1}{3}}\right\}$$

であるから、 $g(x)$ の増減表は下表のようになる。

x	...	$(2a)^{\frac{1}{3}}$	...
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$\searrow$	最小値	$\nearrow$

したがって、関数 $y=g(x)$ は $x=(2a)^{\frac{1}{3}}$ において最小値をとる。つぎに

$$y=F(x)=3\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}(2y-1)=\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{2}{27}(2y-1)^3$$

となるので、 $y \geq \frac{1}{2}$ であり、

$$y \geq x^2$$

$$\Leftrightarrow y \geq \frac{2}{27}(2y-1)^3$$

$$\Leftrightarrow 16y^3-24y^2-15y-2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (y-2)(16y^2+8y+1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (y-2) \cdot 16\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow y \leq 2$$

となる。したがって、領域 D には曲線 $y=F(x)$ の $x \geq 0, \frac{1}{2} \leq y \leq 2$ の部分が含まれ、

$$L=\int_{\frac{1}{2}}^2\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}dy$$

となる。 $x=\frac{\sqrt{6}}{9}(2y-1)^{\frac{3}{2}}$ より、

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\sqrt{6}}{9} \cdot \frac{3}{2}(2y-1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{3}(2y-1)^{\frac{1}{2}}$$

であるので、

$$L=\int_{\frac{1}{2}}^2\sqrt{1+\frac{2}{3}(2y-1)}dy$$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^2\sqrt{\frac{4}{3}y+\frac{1}{3}}dy$$

$$=\left[\frac{2}{3}\left(\frac{4}{3}y+\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{3}{4}\right]_{\frac{1}{2}}^2$$

$$=\frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}-1}{2}$$

と求まる。