

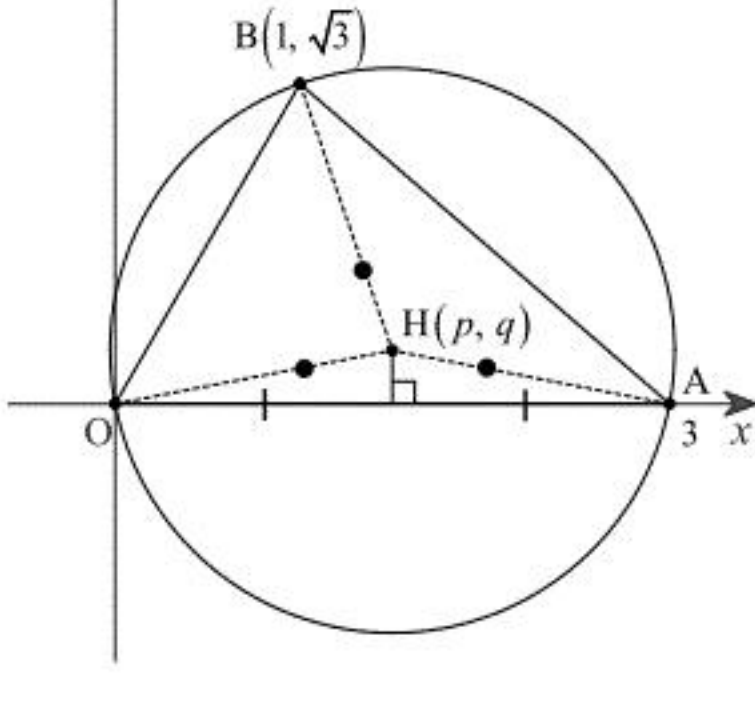
【Ⅰ】

【解答】

	(あ)	(い)	(う)	(え)
(1)	$\frac{3}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{5-\sqrt{7}}{2}$	$\frac{5\sqrt{3}-\sqrt{21}}{6}$
(2)	(お)	(か)	(き)	(く)
	$-\frac{2X}{3Y}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	1	$\sqrt{6}$
(3)	(け)	(こ)		
	$\frac{4\sqrt{3}}{9}$	$\frac{2}{3}$		

【解説】

(1)

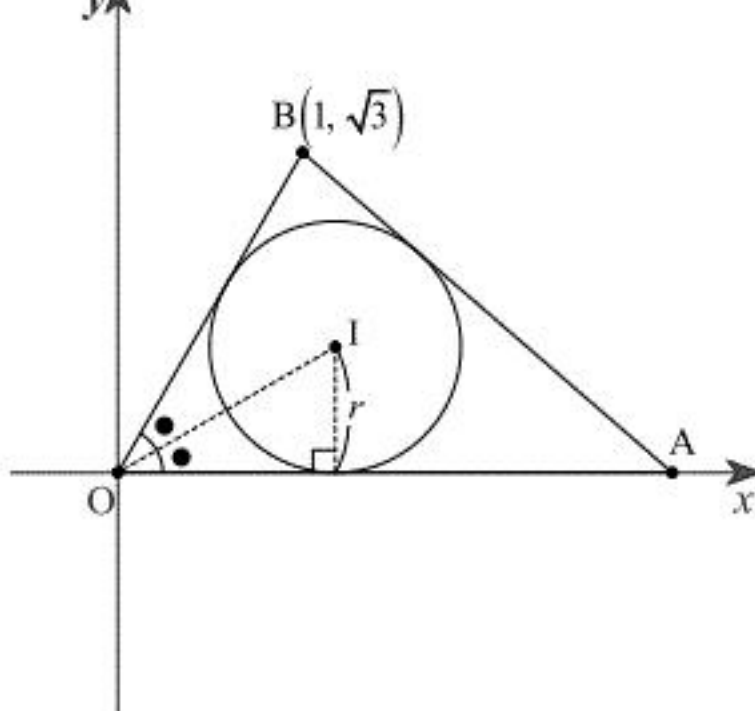


三角形OABの外心を $H(p, q)$ とおくと、Hは線分OAの垂直二等分線上にあるから $p=\frac{3}{2}$ で

ある。また、 $OH=BH$ より、

$$\begin{aligned} OH &= BH \\ \Leftrightarrow OH^2 &= BH^2 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^2 + q^2 &= \left(\frac{3}{2}-1\right)^2 + (q-\sqrt{3})^2 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{3}q &= 1 \\ \therefore q &= \frac{\sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

となる。したがって外心Hの座標は $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$ である。



次に三角形OABの内心をIとおき、内接円の半径を r とおく。ここで、

$$\begin{aligned} OB &= \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \\ AB &= \sqrt{(1-3)^2 + (\sqrt{3}-0)^2} = \sqrt{7} \end{aligned}$$

であるから、三角形OABの面積を2通りで表すことにより、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{3} &= \frac{1}{2} r (3+2+\sqrt{7}) \\ \Leftrightarrow r &= \frac{5\sqrt{3}-\sqrt{21}}{6} \end{aligned}$$

となる。これはIの y 座標に等しい。ここで、 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ であり、Iは $\angle AOB$ の二等分線上

に存在するから、 $\angle AOI = \frac{\pi}{6}$ である。したがって、Iの x 座標は、

$$\frac{r}{\tan \frac{\pi}{6}} = \frac{5-\sqrt{7}}{2}$$

となる。以上より、内心Iの座標は $\left(\frac{5-\sqrt{7}}{2}, \frac{5\sqrt{3}-\sqrt{21}}{6}\right)$ である。

(2)

点 (X, Y) における楕円 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ の接線 ℓ の方程式は、

$$\frac{X}{3}x + \frac{Y}{2}y = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{2X}{3Y}x + \frac{2}{Y} \quad (\because Y > 0)$$

と与えられる。したがって、 ℓ の傾きは $-\frac{2X}{3Y}$ である。また、Pの x 座標は①において $y=0$

とすることて

$$\begin{aligned} \frac{X}{3}x + \frac{Y}{2} \cdot 0 &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3}{X} \quad (\because X > 0) \end{aligned}$$

となるから、 $P\left(\frac{3}{X}, 0\right)$ である。Qは ℓ の y 切片であるから、 $\left(0, \frac{2}{Y}\right)$ である。よって三角形OPQの面積は

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{X} \cdot \frac{2}{Y} = \frac{3}{XY}$$

と得られる。いま、点 (X, Y) は第1象限にあり、かつ楕円 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 上の点より、

$0 < X < \sqrt{3}, 0 < Y < \sqrt{2}$ であり、

$$\begin{aligned} \frac{X^2}{3} + \frac{Y^2}{2} &= 1 \\ \Leftrightarrow Y &= \sqrt{2 - \frac{2}{3}X^2} \quad (\because Y > 0) \end{aligned}$$

となる。したがって三角形OPQの面積は

$$\begin{aligned} \frac{3}{X\sqrt{2-\frac{2}{3}X^2}} &= \frac{3}{\sqrt{2X^2-\frac{2}{3}X^4}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{-\frac{2}{3}\left(X^2-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

と表せるから、三角形OPQの面積は $X^2 = \frac{3}{2}$ すなわち $(X, Y) = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}, 1\right)$ のとき最小値

$$\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \sqrt{6}$$

をとる。

(3)

$f(x) = \cos x \sin 2x$ とおく。このとき、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x \cdot \sin 2x + \cos x \cdot 2 \cos 2x \\ &= -\sin x \cdot 2 \sin x \cos x + \cos x \cdot 2(2 \cos^2 x - 1) \\ &= 2 \cos x \left\{ -(1 - \cos^2 x) + 2 \cos^2 x - 1 \right\} \\ &= 2 \cos x (3 \cos^2 x - 2) \\ &= 6 \cos x \left(\cos x - \frac{\sqrt{6}}{3} \right) \left(\cos x + \frac{\sqrt{6}}{3} \right) \end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ の $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ における増減は下表ようになる。ただし、 α は

$\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3} \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$ を満たす。

x	0	...	α	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	極大	↘	0

ここで、 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ より $\sin \alpha > 0$ であるから

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ &= \sqrt{1 - \frac{2}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

となる。よって、 $y = f(x) \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$ は $x = \alpha$ のとき最大値

$$\begin{aligned} \cos \alpha \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

をとる。また、増減表より $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において $f(x) \geq 0$ であるから、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cos^2 x dx \\ &= \left[-\frac{2}{3} \cos^3 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。

【Ⅱ】

【解答】

	(あ)	(い)	(う)	(え)	(お)	(か)		
(1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{2}$		
	(き)	(く)	(け)	(こ)	(さ)	(し)	(す)	(せ)
(2)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	2	$\frac{1}{3}$

【解説】

(1)
状態 A に対し操作 T を施すとき、袋1から取り出す玉は必ず白玉である。したがって、袋2から取り出す玉の色に応じて、状態 A または状態 B に遷移する。ここで、袋2からは赤玉が2個、白玉が2個入っている状態から1個の玉を無作為に取り出すことになるから、

$$P(A \rightarrow A) = P(A \rightarrow B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

である。次に、状態 B に対し操作 T を施すとき、袋1から赤玉を取り出し、かつ、袋2から白玉を取り出す場合に状態 A に遷移する。したがって、

$$P(B \rightarrow A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{6}$$

である。また、状態 B から状態 B へ遷移するのは、
・袋1から赤玉を取り出し、かつ、袋2から赤玉を取り出す
・袋1から白玉を取り出し、かつ、袋2から白玉を取り出す
のいずれかの場合であるから、

$$P(B \rightarrow B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$$

である。最後に、状態 C に対し操作 T を施すとき、操作 T によって袋1から取り出すことができる赤玉の数が高々1個であることから、状態 A には遷移しないため、

$$P(C \rightarrow A) = 0$$

であることがわかる。また、状態 C から状態 B へ遷移するのは、袋1から赤玉を取り出し、かつ、袋2から白玉を取り出す場合であるから、

$$P(C \rightarrow B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

である。

(2)
 $n \geq 2$ とするとき、(1)の結果を利用することで、

$$\begin{cases} a_n = P(A \rightarrow A) \cdot a_{n-1} + P(B \rightarrow A) \cdot b_{n-1} + P(C \rightarrow A) \cdot c_{n-1} \\ b_n = P(A \rightarrow B) \cdot a_{n-1} + P(B \rightarrow B) \cdot b_{n-1} + P(C \rightarrow B) \cdot c_{n-1} \end{cases}$$
$$\therefore \begin{cases} a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{6}b_{n-1} \\ b_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{2}{3}b_{n-1} + \frac{1}{2}c_{n-1} \end{cases}$$

の関係式が得られる。ここで、すべての自然数 n について、

$$a_n + b_n + c_n = 1$$

が成り立つから、

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{2}{3}b_{n-1} + \frac{1}{2}c_{n-1} \\ &= \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}) + \frac{1}{6}b_{n-1} \\ &= \frac{1}{6}b_{n-1} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

の関係式が成り立つ。これより、

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{6}b_{n-1} + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow b_n - \frac{3}{5} &= \frac{1}{6}\left(b_{n-1} - \frac{3}{5}\right) \\ \therefore b_n &= \left(b_1 - \frac{3}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{3}{5} \end{aligned}$$

が成り立つ。状態 B から始めて操作 T を繰り返し施すとき、

$$b_1 = P(B \rightarrow B) = \frac{2}{3}$$

であるから、 b_n を n の式で表すと、

$$\begin{aligned} b_n &= \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{3}{5} \\ &= \frac{1}{15}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{3}{5} \\ &= \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{aligned}$$

となる。さらに、 $n \geq 2$ について、

$$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{6}b_{n-1}$$

が成り立つことから、 $n \geq 1$ について、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{6}b_n \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{6}\left\{\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

が成り立つ。この両辺を $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ で割ると、

$$\frac{a_{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}} = \frac{a_n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} + \frac{1}{6\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}\left\{\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$$

と変形でき、

$$d_n = \frac{a_n}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = 2^n a_n$$

とおくとき、

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= d_n + \frac{1}{6\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}\left\{\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\} \\ \Leftrightarrow d_{n+1} - d_n &= \frac{2^n}{5} + \frac{2}{15}\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

と表せる。したがって、数列 $\{d_n\}$ は階差数列の一般項が $\frac{2^n}{5} + \frac{2}{15}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ となる数列であるから、

$n \geq 2$ のとき、 d_n を n の式で表すと、

$$\begin{aligned} d_n &= d_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \frac{2^i}{5} + \frac{2}{15}\left(\frac{1}{3}\right)^i \right\} \\ &= 2^1 a_1 + \frac{1}{5} \cdot 2 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} + \frac{2}{15} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= 2 \cdot P(B \rightarrow A) + \frac{2}{5}(2^{n-1} - 1) + \frac{1}{15}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot 2^n - \frac{2}{5} + \frac{1}{15} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \frac{1}{5}\left\{2^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

となる。これは、 $n=1$ でも成り立つ。

【Ⅲ】

〔解答〕

(1)	(あ)	(い)	(う)	(え)
	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
(3)	(お)			
	$m<-\frac{4}{3}$			
(4)	(か)	(き)	(く)	
	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$		
(5)	(け)	(こ)		
	$\frac{1}{6}\log\left(1+\frac{6}{\sqrt{9+\frac{12}{m}}-3}\right)$	1		

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{-3(x^2-1)-6x^2}{9x^2(x^2-1)^2} \\&= -\frac{3x^2-1}{3x^2(x^2-1)^2} \\&= -\frac{3\left(x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{3x^2(x^2-1)^2}\end{aligned}$$

より、増減表は以下の通りになる。

x	...	-1	...	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	...	0	...	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	...	1	...
$f'(x)$	-	$\searrow$	-	0	+	$\searrow$	+	0	-	$\searrow$	-
$f(x)$		$\searrow$			$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$

よって $f(x)$ は $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき極小値

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{1}{3\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

であり、 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき極大値

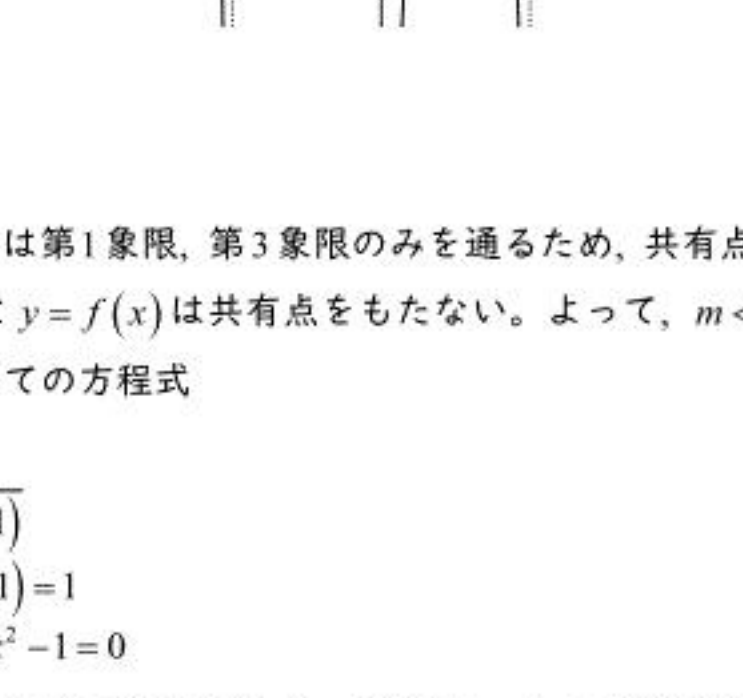
$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{1}{3\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

をとる。

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{x\rightarrow+\infty}f(x) &= 0 \\ \lim_{x\rightarrow-1-0}f(x) &= -\infty \\ \lim_{x\rightarrow-1+0}f(x) &= \infty \\ \lim_{x\rightarrow-0}f(x) &= \infty \\ \lim_{x\rightarrow+0}f(x) &= -\infty \\ \lim_{x\rightarrow1-0}f(x) &= -\infty \\ \lim_{x\rightarrow1+0}f(x) &= \infty\end{aligned}$$

であるから、 $y=f(x)$ の概形は以下のようになる。



(3)

$m>0$ のとき、 $y=mx$ は第1象限、第3象限のみを通るため、共有点は高々2つである。また、 $m=0$ のとき $y=mx$ と $y=f(x)$ は共有点をもたない。よって、 $m<0$ として考える。満たすべき条件は、 x についての方程式

$$\begin{aligned}mx &= \frac{1}{3x(x^2-1)} \\ \Leftrightarrow 3mx^2(x^2-1) &= 1 \\ \Leftrightarrow 3mx^4-3mx^2-1 &= 0\end{aligned}$$

が異なる4つの実数解をもつことである。ここで、 $x^2=t$ とおくと、 $|x|<1$ より $0<t<1$ である。したがって、 t についての2次方程式

$$3mt^2-3mt-1=0 \qquad \cdots \textcircled{1}$$

が $0<t<1$ の範囲に異なる2つの実数解をもてばよい。①の左辺を $g(t)$ とすると、

$$\begin{aligned}g(t) &= 3mt^2-3mt-1 \\ &= 3m\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}m-1\end{aligned}$$

と変形できる。求める m の範囲を $y=g(t)$ のグラフの端点、頂点の y 座標、軸の条件から導出すると、 $m<0$ より、

$$\begin{aligned}&\begin{cases} g(0)<0 \\ g(1)<0 \\ -\frac{3}{4}m-1>0 \\ 0<\frac{1}{2}<1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} -1<0 \\ -1<0 \\ m<-\frac{4}{3} \\ 0<\frac{1}{2}<1 \end{cases} \\ \therefore &m<-\frac{4}{3} \quad (\because m<0)\end{aligned}$$

となる。

(4)

$$\begin{aligned}\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x+1} &= \frac{ax(x+1)+b(x^2-1)+cx(x-1)}{x(x^2-1)} \\ &= \frac{(a+b+c)x^2+(a-c)x-b}{x(x^2-1)}\end{aligned}$$

であるから、 $f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x+1}$ が恒等的に成り立つのは

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a-c=0 \\ -b=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\therefore a=\frac{1}{6}, b=-\frac{1}{3}, c=\frac{1}{6}$$

のときである。

(5)

$x(m)$ は

$$3m\{x(m)\}^4-3m\{x(m)\}^2-1=0$$

を満たすから

$$\begin{aligned}\{x(m)\}^2 &= \frac{3m+\sqrt{9m^2+12m}}{6m} \quad (\because \{x(m)\}^2>0) \\ &= \frac{3+\sqrt{9+\frac{12}{m}}}{6} \quad (\because m>0) \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{9+\frac{12}{m}}\end{aligned}$$

である。したがって $A(m)$ は m を用いて

$$\begin{aligned}A(m) &= \lim_{T\rightarrow\infty}\int_{x(m)}^Tf(x)dx \\ &= \lim_{T\rightarrow\infty}\int_{x(m)}^T\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x+1}\right)dx \\ &= \lim_{T\rightarrow\infty}\left[\frac{1}{6}\log|x-1|-\frac{1}{3}\log|x|+\frac{1}{6}\log|x+1|\right]_{x(m)}^T \\ &= \lim_{T\rightarrow\infty}\left[\frac{1}{6}\log\left|\frac{x^2-1}{x^2}\right|\right]_{x(m)}^T \\ &= \lim_{T\rightarrow\infty}\frac{1}{6}\log\left|1-\frac{1}{T^2}\right|-\frac{1}{6}\log\left|1-\frac{1}{\{x(m)\}^2}\right| \\ &= \frac{1}{6}\log 1-\frac{1}{6}\log\left|1-\frac{6}{3+\sqrt{9+\frac{12}{m}}}\right| \\ &= -\frac{1}{6}\log\frac{-3+\sqrt{9+\frac{12}{m}}}{3+\sqrt{9+\frac{12}{m}}} \\ &= \frac{1}{6}\log\frac{3+\sqrt{9+\frac{12}{m}}}{-3+\sqrt{9+\frac{12}{m}}} \\ &= \frac{1}{6}\log\left(1+\frac{6}{\sqrt{9+\frac{12}{m}}-3}\right)\end{aligned}$$

と表せる。続いて点P、Qの位置関係は以下の図のようになる。



したがって、点Pは $y=f(x)$ 上の点より、

$$\begin{aligned}B(m) &= \frac{1}{2}\cdot x(m)\cdot\frac{1}{3x(m)\left[\{x(m)\}^2-1\right]} \\ &= \frac{1}{6\left[\{x(m)\}^2-1\right]} \\ &= \frac{1}{6\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{9+\frac{12}{m}}-1\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{9+\frac{12}{m}}-3}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\lim_{m\rightarrow+0}\frac{A(m)}{B(m)} &= \lim_{m\rightarrow+0}\left\{\left(\sqrt{9+\frac{12}{m}}-3\right)\cdot\frac{1}{6}\log\left(1+\frac{6}{\sqrt{9+\frac{12}{m}}-3}\right)\right\} \\ &= \lim_{m\rightarrow+0}\log\left(1+\frac{6}{\sqrt{9+\frac{12}{m}}-3}\right) \\ &= \log e \\ &= 1\end{aligned}$$

と求まる。

【Ⅳ】

【解答】

	(あ)	(い)	(う)	(え)	(お)	(か)	(き)	(く)
(1)	$5t-8$	$-t$	$3t-6$	$2t-3$	t	$-t$	t	t
(2)	(け)	(こ)						
	$-8t^2+24t-12$	8						
(3)	(さ), (し), (す)	(せ)	(そ)					
	ABD, ACD, BCD(順不同)	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$					
(4)	(た)	(ち)						
	$\frac{11}{7}$	$\frac{44}{7}$						

解説]

【解説】

(1) 4点O, A, B, Cの z 座標はそれぞれ0, 1, 2, 3より, $1 < t < 2$ のとき平面 $z=t$ に関して点Aは原点Oと同じ側にあり, 2点B, Cはその反対側にある。よって, 四面体OABCは平面 $z=t$ と辺OB, OC, AB, ACで交わる。また, $t=1$ のとき四面体OABCは平面 $z=t$ と点Aおよび辺OB, OCで交わり, $t=2$ のとき四面体OABCは平面 $z=t$ と点Bおよび辺OC, ACで交わる。以上より, 条件を満たすWは平面 $z=t$ と辺ABとの交点であり, X, Y, Zは平面 $z=t$ とそれぞれ辺AC, OB, OCとの交点である。このとき, 3点A, W, Bの z 座標はそれぞれ1, t , 2より, 点Wは線分ABを $(t-1):(2-t)$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OW} &= \frac{(2-t)\overrightarrow{OA} + (t-1)\overrightarrow{OB}}{(t-1) + (2-t)} \\ &= (2-t)(-3, -1, 1) + (t-1)(2, -2, 2) \\ &= (5t-8, -t, t)\end{aligned}$$

より $Y(5t-8, -t, t)$ となる。同様に, 3点A, X, Cの z 座標はそれぞれ1, t , 3より, 点Xは線分ACを $(t-1):(3-t)$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX} &= \frac{(3-t)\overrightarrow{OA} + (t-1)\overrightarrow{OC}}{(t-1) + (3-t)} \\ &= \frac{1}{2}\{(3-t)(-3, -1, 1) + (t-1)(3, 3, 3)\} \\ &= (3t-6, 2t-3, t)\end{aligned}$$

より $X(3t-6, 2t-3, t)$ となる。また, 3点O, Y, Bの z 座標はそれぞれ0, t , 2より, 点Yは線分OBを $t:(2-t)$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OY} = \frac{t}{2}\overrightarrow{OB} = (t, -t, t)$$

より $Y(t, -t, t)$ となる。同様に, 3点O, Z, Cの z 座標はそれぞれ0, t , 3より, 点Zは線分OCを $t:(3-t)$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{t}{3}\overrightarrow{OC} = (t, t, t)$$

より $Z(t, t, t)$ となる。したがって, W, X, Y, Zの座標は

$$W(5t-8, -t, t), X(3t-6, 2t-3, t), Y(t, -t, t), Z(t, t, t)$$

である。

(2) $t=1$ のとき $W(-3, -1, 1), X(-3, -1, 1), Y(1, -1, 1), Z(1, 1, 1)$ より $\overrightarrow{YX}=(-4, 0, 0), \overrightarrow{YZ}=(0, 2, 0)$ であるから

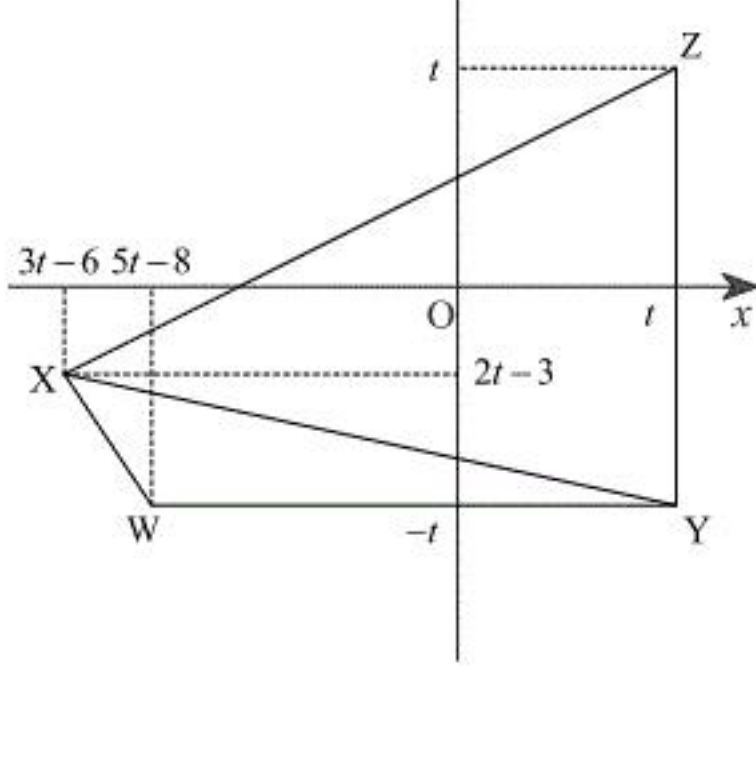
$$A(1) = \frac{1}{2}|-4 \cdot 2 - 0 \cdot 0| = 4$$

であり, $t=2$ のとき $W(2, -2, 2), X(0, 1, 2), Y(2, -2, 2), Z(2, 2, 2)$ より

$\overrightarrow{XY}=(2, -3, 0), \overrightarrow{XZ}=(2, 1, 0)$ であるから

$$A(2) = \frac{1}{2}|2 \cdot 1 - (-3) \cdot 2| = 4$$

である。 $1 < t < 2$ のとき(1)の結果と $3t-6 < 5t-8 < t, -t < 2t-3 < t$ より, S_t を図示すると下図のような四角形XWZYとなる。



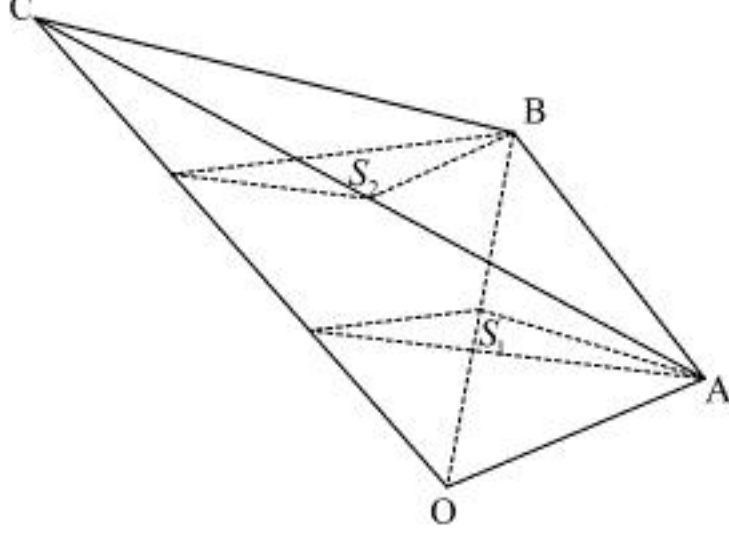
よって,

$$\begin{aligned}A(t) &= \triangle XWY + \triangle XYZ \\ &= \frac{1}{2}\{t - (5t-8)\}\{(2t-3) - (-t)\} + \frac{1}{2}\{t - (-t)\}\{t - (3t-6)\} \\ &= (-6t^2 + 18t - 12) + (-2t^2 + 6t) \\ &= -8t^2 + 24t - 12\end{aligned}$$

であり, これは $t=1, 2$ のときも成り立つ。したがって, $1 \leq t \leq 2$ のとき

$$A(t) = -8t^2 + 24t - 12$$

である。



ここで, 四面体OABCの $0 \leq z \leq 1, 1 \leq z \leq 2, 2 \leq z \leq 3$ の部分の体積をそれぞれ V_1, V_2, V_3 とすると, $A(1)=A(2)=4$ より V_1, V_3 はともに底面積が4で高さが1の三角錐の体積であるから,

$$V_1 = V_3 = \frac{4}{3}$$

である。また,

$$\begin{aligned}V_2 &= \int_1^2 A(t) dt \\ &= \int_1^2 (-8t^2 + 24t - 12) dt \\ &= \left[-\frac{8}{3}t^3 + 12t^2 - 12t \right]_1^2 \\ &= \left(-\frac{64}{3} + 48 - 24 \right) - \left(-\frac{8}{3} + 12 - 12 \right) \\ &= \frac{16}{3}\end{aligned}$$

である。したがって,

$$\begin{aligned}V &= V_1 + V_2 + V_3 \\ &= \frac{4}{3} + \frac{16}{3} + \frac{4}{3} \\ &= 8\end{aligned}$$

となる。

(3) 多面体の各辺は2つの面で共有されるから, 六面体が三角形OAB, OBC, OACを面とすると,

残りの3つの三角形の面のいずれかはAB, BC, ACを辺としてもつ。ABを辺としてもつ三角形OAB以外の三角形として三角形ABC, ABDが考えられるが, 三角形ABCを面とすると三角形OAB, OBC, OACと合わせて四面体OABCを構成するため不適である。よって, 三角形ABDを六面体の面とする必要がある。同様に, 三角形BCD, ACDを六面体の面とする必要がある。ここで, $\overrightarrow{AB}=(-5, -1, 1), \overrightarrow{AC}=(6, 4, 2)$ より, $\overrightarrow{OE}$ は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} &= u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC} \\ &= (5u+6v, -u+4v, u+2v) \\ \therefore \overrightarrow{OE} &= (5u+6v-3, -u+4v-1, u+2v+1)\end{aligned}$$

と表せる。また, Eは直線OD上の点でもあるから, 実数 k を用いて $\overrightarrow{OE}$ は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= k\overrightarrow{OD} \\ &= (6k, 2k, 4k)\end{aligned}$$

と表せる。したがって, これら2式の各成分を比較して

$$\begin{cases} 5u+6v-3=6k \\ -u+4v-1=2k \\ u+2v+1=4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8u-6v=0 \\ 6v=6k \\ u+2v+1=4k \end{cases}$$

$$\therefore (u, v, k) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

となる。このとき, $\overrightarrow{OE} = \frac{4}{5}\overrightarrow{OD}$ であり, 点Eは平面 α 上の点であるから, 平面 α に関して原点Oと点Dは反対側にあり, 確かに三角形OAB, OBC, OAC, ABD, ACD, BCDを面とする六面体は存在する。

(4) (3)の六面体は2つの四面体OABC, DABCを合わせた立体であるから, 四面体DABCの平面 $z=t$ ($1 < t < 2$) による切り口の面積を $B(t)$ とすると,

$$U(t) = A(t) + B(t)$$

となる。ここで, 4点A, B, C, Dの z 座標はそれぞれ1, 2, 3, 4より, $1 < t < 2$ のとき平面 $z=t$ に関して点Aは原点Oと同じ側にあり, 3点B, C, Dはその反対側にある。よって, 四面体DABCは平面 $z=t$ と2点W, Xおよび辺ADで交わる。平面 $z=t$ と辺ADの交点をPとすると, 3点A, P, Dの z 座標はそれぞれ1, t , 4より, 点Pは線分ADを $(t-1):(4-t)$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{(4-t)\overrightarrow{OA} + (t-1)\overrightarrow{OD}}{(t-1) + (4-t)} \\ &= \frac{1}{3}\{(4-t)(-3, -1, 1) + (t-1)(6, 2, 4)\} \\ &= (3t-6, t-2, t)\end{aligned}$$

より $P(3t-6, t-2, t)$ となる。よって, 四面体DABCの平面 $z=t$ による切り口は

$$W(5t-8, -t, t), X(3t-6, 2t-3, t), P(3t-6, t-2, t)$$

を頂点とする三角形であり, $\overrightarrow{PW}=(2t-2, -2t+2, 0), \overrightarrow{PX}=(0, t-1, 0)$ より

$$B(t) = \frac{1}{2}|(2t-2)(t-1) - (-2t+2) \cdot 0| = t^2 - 2t + 1$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned}U(t) &= A(t) + B(t) \\ &= -7t^2 + 22t - 11 \\ &= -7\left(t - \frac{11}{7}\right)^2 + \frac{44}{7}\end{aligned}$$

より, $U(t)$ は $t = \frac{11}{7}$ において最大値 $\frac{44}{7}$ をとる。