

【 I 】

【解答】

(1)	(あ)	(い)
	84	148
(2)	(う)	
	$\frac{4}{e^2+1}$	
(3)	(え)	
	$\frac{4}{3\pi}$	
(4)	(お)	
	$\frac{13}{6}$	

$$(5) \qquad a \geq 0, b \geq 0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d}=2\sqrt{2} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$ad+bc=18 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

とする。②について、

$$\begin{aligned} \frac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d} &= 2\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow a\sqrt{2}+b &= 2\sqrt{2}(c\sqrt{2}+d) \left(\because c\sqrt{2}+d \neq 0 \right) \\ \Leftrightarrow a\sqrt{2}+b &= 2d\sqrt{2}+4c \end{aligned}$$

となる。したがって、無理数の相等より、

$$\begin{cases} a=2d \\ b=4c \end{cases} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

を得る。①、④より、 $c \geq 0, d \geq 0$ である。また、④を③に代入して、

$$2d^2+4c^2=18$$

$$\Leftrightarrow 2c^2+d^2=9$$

となる。 $d^2 \geq 0$ より

$$2c^2 \leq 9$$

$$\Leftrightarrow c^2 \leq \frac{9}{2}$$

となる。よって、 $c \geq 0$ から $c=0, 1, 2$ となることが必要である。それぞれの c の値を

$2c^2+d^2=9$ に代入すると、 $d \geq 0$ より

$$d=3, \sqrt{7}, 1$$

となる。したがって、 $2c^2+d^2=9$ を満たす非負整数 c, d は、

$$(c, d)=(0, 3), (2, 1)$$

のみである。これは $c \neq 0$ または $d \neq 0$ を満たす。よって、④と合わせて、

$$(a, b, c, d)=(6, 0, 0, 3), (2, 8, 2, 1)$$

を得る。

$$\text{(答)} \quad (a, b, c, d)=(6, 0, 0, 3), (2, 8, 2, 1)$$

【解説】

- (1) 身長の平均値を mean，標準偏差を SD と表す。このとき、身長が ≥ 153 cm 以上 170.5 cm 以下、すなわち $\text{mean}-1.00\text{SD} \sim \text{mean}+2.50\text{SD}$ の範囲にある生徒の割合を求める。正規分布において、 $\text{mean}-1.00\text{SD} \sim \text{mean}$ の範囲に含まれるデータの割合は、 $\text{mean} \sim \text{mean}+1.00\text{SD}$ の範囲に含まれるデータの割合に等しく、

$$p(1.00)=0.3413=34.13\%$$

である。同様に、 $\text{mean} \sim \text{mean}+2.50\text{SD}$ の範囲に含まれるデータの割合は、

$$p(2.50)=0.4938=49.38\%$$

である。したがって、身長が ≥ 153 cm 以上 170.5 cm 以下の生徒は、

$$34.13+49.38=83.51(\%)$$

存在し、小数第一位を四捨五入すると、約 84% いる。

また、身長が $\leq \text{mean}-2.00\text{SD}$ の範囲に含まれる、すなわち 148 cm 以下の生徒の割合は、

$$\frac{1}{2}-p(2.00)=0.0228=2.28\%$$

であり、身長が $\leq \text{mean}-1.80\text{SD}$ の範囲に含まれる、すなわち 149 cm 以下の生徒の割合は、

$$\frac{1}{2}-p(1.80)=0.0359=3.59\%$$

である。よって、身長が148 cm の生徒は身長が低い方から 2.5% に含まれ、身長が149 cm の生徒は身長が低い方から 2.5% に含まれないため、身長が低い方から 2.5% の中に入る生徒の身長は 148 cm 以下である。

(問題文通りに解釈すると、(い)には無限に大きい自然数が当てはまってしまうため、「身長が $\leq$ (い) cm 以下の生徒は身長が低い方から 2.5% の中に入る」と解釈して解答を導いている。)

- (2) $f(x)$ は確率密度関数より $\int_1^e f(x)dx=1$ を満たす。部分積分により、

$$\begin{aligned} \int_1^e f(x)dx &= 1 \\ \Leftrightarrow \int_1^e rx \log x dx &= 1 \\ \Leftrightarrow \left[\frac{1}{2} rx^2 \log x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2} rx dx &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} re^2 - \left[\frac{1}{4} rx^2 \right]_1^e &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} re^2 - \left(\frac{1}{4} re^2 - \frac{1}{4} r \right) &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4} r(e^2+1) &= 1 \\ \therefore r &= \frac{4}{e^2+1} \end{aligned}$$

となる。

- (3) 区分求積法により、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin^3 \left(\frac{k\pi}{2n} \right) &= \int_0^1 \sin^3 \left(\frac{\pi}{2} x \right) dx \\ &= \int_0^1 \left\{ 1 - \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} x \right) \right\} \cdot \left\{ -\cos \left(\frac{\pi}{2} x \right) \right\}' dx \\ &= \left[-\frac{2}{\pi} \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{2} x \right) - \frac{1}{3} \cos^3 \left(\frac{\pi}{2} x \right) \right\} \right]_0^1 \\ &= 0 - \left(-\frac{2}{\pi} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{4}{3\pi} \end{aligned}$$

と求まる。

- (4) $z=r(\cos \theta + i \sin \theta) \left(r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi \right)$

とおくと、ド・モアブルの定理より、

$$z^3=r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$$

である。また、整数 n を用いて、

$$\begin{aligned} z^3 &= 12 \left(1 + \sqrt{3}i \right) \\ &= 24 \left\{ \cos \left(\frac{1}{3} + 2n \right) \pi + i \sin \left(\frac{1}{3} + 2n \right) \pi \right\} \end{aligned}$$

と表せるから、 z の絶対値と偏角について、

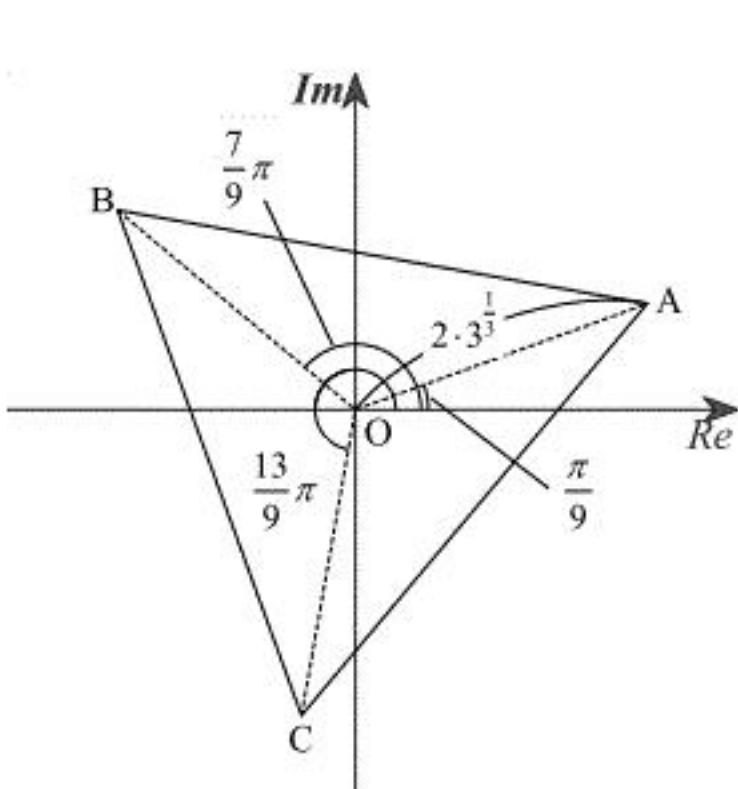
$$\begin{cases} r=2 \cdot 3^{\frac{1}{3}} \\ \theta = \left(\frac{1}{9} + \frac{2n}{3} \right) \pi \end{cases}$$

が求まる。 $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲でこれを満たす自然数 n は $n=0, 1, 2$ であるから、

$$z=2 \cdot 3^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9} \right), 2 \cdot 3^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{7\pi}{9} + i \sin \frac{7\pi}{9} \right), 2 \cdot 3^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{13\pi}{9} + i \sin \frac{13\pi}{9} \right)$$

の3解が得られる。これらを順に α, β, γ とおいても一般性を失わない。したがって、

$\triangle ABC$ を図示すると以下のようになる。



ここで、 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = \frac{2\pi}{3}$ であるから、 $\triangle ABC$ は正三角形である。また、

$$\begin{aligned} AB &= 2OA \cos \frac{\pi}{6} \\ &= 2 \cdot \left(2 \cdot 3^{\frac{1}{3}} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 2 \cdot 3^{\frac{5}{6}} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} AB^2 \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot 3^{\frac{5}{6}} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 3^{\frac{13}{6}} \end{aligned}$$

となる。よって、 $s = \frac{13}{6}$ である。

【Ⅱ】

【解答】

	(あ)	(い)	(う)	(え)	(お)	(か)	(き)
(1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n$	5
	(く)	(け)	(こ)	(さ)	(し)	(す)	(せ)
	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{3}{4}$	-2	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$
(2)	(そ)	(た)	(ち)	(つ)	(て)		
	$\frac{1}{2}n+1$	3	$-\frac{1}{4}$	-1	$-\frac{3}{2}$		

【解説】

(1)

操作Tを n 回施し終えたときに袋の中に入っている白玉の個数によって場合分けを行い、各場合において $(n+1)$ 回目の操作Tで赤玉を取り出す確率と白玉を取り出す確率を考える。

[1] n 回の操作後、白玉の個数が3個であるとき

赤玉、白玉の個数はともに3個であることから $(n+1)$ 回目の操作で赤玉、白玉を取り出す確率はともに $\frac{1}{2}$ である。

[2] n 回の操作後、白玉の個数が2個であるとき

赤玉の個数は3個であることから $(n+1)$ 回目の操作で白玉を取り出す確率は $\frac{2}{5}$ であり、

赤玉を取り出す確率は $\frac{3}{5}$ である。

[3] n 回の操作後、白玉の個数が1個であるとき

赤玉の個数は3個であることから $(n+1)$ 回目の操作で白玉を取り出す確率は $\frac{1}{4}$ であり、

赤玉を取り出す確率は $\frac{3}{4}$ である。

[4] n 回の操作後白玉の個数が0個であるとき

$(n+1)$ 回目の操作Tは行われない。

以上, [1], [2], [3], [4]より,

$$\begin{cases} a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n & \cdots \textcircled{1} \\ b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{3}{5}b_n & \cdots \textcircled{2} \\ c_{n+1}=\frac{2}{5}b_n+\frac{3}{4}c_n & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

が成り立つ。また、 $a_1=b_1=\frac{1}{2}$, $c_1=0$ であり、①式から数列 $\{a_n\}$ は初項 $\frac{1}{2}$ 、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。よって、

$$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

と求められる。これを②式に代入すると、

$$b_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{3}{5}b_n$$

となる。この式の両辺に 2^{n+1} を乗じ、 $d_n=2^n\cdot b_n$ とおくと、

$$\begin{aligned} 2^{n+1}\cdot b_{n+1} &= \frac{3}{5}\cdot 2^{n+1}\cdot b_n+1 \\ \Leftrightarrow d_{n+1} &= \frac{6}{5}d_n+1 \\ \Leftrightarrow d_{n+1}+5 &= \frac{6}{5}(d_n+5) \end{aligned}$$

と変形でき、 $d_1=2\cdot b_1=1$ であることから、数列 $\{d_n+5\}$ は初項6、公比 $\frac{6}{5}$ の等比数列である。よって、

$$\begin{aligned} d_n &= 6\cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{n-1}-5 \\ \Leftrightarrow b_n &= \frac{6^n}{2^n\cdot 5^{n-1}}-\frac{5}{2^n} \\ \Leftrightarrow b_n &= 5\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

と求められる。これを③式に代入すると、

$$c_{n+1}=2\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}+\frac{3}{4}c_n$$

となる。この式の両辺に $\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}$ を乗じ、 $e_n=\left(\frac{4}{3}\right)^n\cdot c_n$ とおくと、

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}\cdot c_{n+1} &= \left(\frac{4}{3}\right)^n\cdot c_n+2\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}\cdot \left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\} \\ \Leftrightarrow e_{n+1}-e_n &= \frac{8}{3}\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

と変形できることから、数列 $\{e_n\}$ の階差数列の一般項が $\frac{8}{3}\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$ になることがわか

る。 $e_1=\frac{4}{3}\cdot c_1=0$ であることから、 $n\geq 2$ において、数列 $\{e_n\}$ の一般項は、

$$\begin{aligned} e_n &= e_1+\frac{8}{3}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^k-\left(\frac{2}{3}\right)^k\right\} \\ &= \frac{8}{3}\left\{4\cdot \frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}}{1-\frac{4}{5}}-\frac{2}{3}\cdot \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{2}{3}}\right\} \\ &= \frac{8}{3}\left[4\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right\}-2\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}\right] \\ &= \frac{16}{3}\left\{1-2\cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\} \end{aligned}$$

と求められる。ただし、 $e_1=0$ より、上記の表式は $n=1$ のときも成立する。よって、数列 $\{c_n\}$ の一般項は、

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{16}{3}\cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n\left\{1-2\cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\} \\ &= 4\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}-2\cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \end{aligned}$$

と求められる。

(2)

$0< k < n$ を満たす整数 k に対して、 $X_n=k$ となる確率は、操作Tを k 回施し終えたとき、白玉が袋の中に3個入っており、かつ $(k+1)$ 回目の操作で白玉を取り出す確率であることから、

(1)で求めた a_n を用いて

$$a_k\cdot \frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

となる。ここで、 $X_n=0$ となる確率は、1回目の操作で白玉を取り出す確率であることから $\frac{1}{2}$ であり、上記の表式は $k=0$ のときも成立する。また、 $X_n=n$ となる確率は、 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ で

あることから、 Y_n の期待値 $E[Y_n]$ は

$$\begin{aligned} E[Y_n] &= \sum_{k=0}^{n-1}2^k\cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}+2^n\cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{2}n+1 \end{aligned}$$

と求められる。また、 Y_n^2 の期待値 $E[Y_n^2]$ は

$$\begin{aligned} E[Y_n^2] &= \sum_{k=0}^{n-1}\left\{\left(2^k\right)^2\cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right\}+\left(2^n\right)^2\cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}2^{k-1}+2^n \\ &= \frac{1}{2}\cdot \frac{2^n-1}{2-1}+2^n \\ &= 3\cdot 2^{n-1}-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。よって、 Y_n の分散 $V[Y_n]$ は、

$$\begin{aligned} V[Y_n] &= E[Y_n^2]-\left(E[Y_n]\right)^2 \\ &= 3\cdot 2^{n-1}-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}n+1\right)^2 \\ &= 3\cdot 2^{n-1}-\frac{1}{4}n^2-n-\frac{3}{2} \end{aligned}$$

と求められる。

【Ⅲ】

【解答】

(1)	(i)	(あ)				
		$24x^6-4x^2+1$				
(2)	(i)	(い)	(う)	(え)	(お)	(か)
		a	3	$-3a$	$-6a^2+4a-1$	$3a^3$
	(ii)	(き)	(く)	(け)	(こ)	
		$\frac{1}{3}$	1	$a-\frac{\sqrt{3(3a^2-4a+1)}}{3}$	$a+\frac{2\sqrt{3(3a^2-4a+1)}}{3}$	
	(iii)	(さ)	(し)	(す)	(せ)	
		$-3a^2+4a-1$	a^3	$a^2e^{\frac{a^2}{2}}$	$\frac{2}{e}$	

(1)(ii)

2つの多項式 $G(x)=a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0$ と $H(x)=b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0$ に対し、 n が自然数であつて $b_n\neq 0$ であるとき、

$$G\bigl(H(x)\bigr)=0がxについての恒等式である\Rightarrow a_m=\cdots=a_0=0\quad\cdots\cdots\textcircled{1}$$

が成り立つことを0以上の整数 m に関する数学的帰納法により示す。

[1] $m=0$ のとき

$$G(x)=a_0より、G\bigl(H(x)\bigr)=a_0であるため、G\bigl(H(x)\bigr)=0がxについての恒等式ならば、$$

$$a_0=0である。よつて、\textcircled{1}が成り立つ。$$

[2] $m=k$ (k は0以上の整数)のとき

\textcircled{1}が成り立つと仮定する。ここで、

$$G(x)=a_{k+1}x^{k+1}+a_kx^k+\cdots+a_1x+a_0$$

$$G_1(x)=a_kx^k+\cdots+a_1x+a_0$$

$$\text{とすると、}G(x)=a_{k+1}x^{k+1}+G_1(x)\text{である。また、}a_{k+1}\bigl(H(x)\bigr)^{k+1}\text{の}x^{n(k+1)}\text{の係数は}a_{k+1}b_n^{k+1}\text{で}$$

$$\text{あり、}G_1\bigl(H(x)\bigr)\text{は高々}nk\text{次式である。よつて、}G\bigl(H(x)\bigr)=a_{k+1}\bigl(H(x)\bigr)^{k+1}+G_1\bigl(H(x)\bigr)\text{よ}$$

$$\text{り、}G\bigl(H(x)\bigr)=0がxについての恒等式ならば、$$

$$a_{k+1}b_n^{k+1}=0$$

$$\therefore a_{k+1}=0\left(\because b_n\neq 0\right)$$

$$\text{であり、}G\bigl(H(x)\bigr)=G_1\bigl(H(x)\bigr)\text{となる。したがつて、}G_1\bigl(H(x)\bigr)=0がxについての恒等式$$

$$\text{となるため、仮定より、}a_k=\cdots=a_0=0\text{となる。以上より、}m=k+1\text{のとき、}\textcircled{1}\text{が成り立つ。}$$

以上、[1],[2]より、0以上のすべての整数 m に対し、\textcircled{1}が成り立つ。

(証明終)

【解説】

(1)(i)

$$Q(x)=2x^2+1より、$$

$$\bigl(Q(x)\bigr)^2=4x^4+4x^2+1$$

$$\bigl(Q(x)\bigr)^3=8x^6+12x^4+6x^2+1$$

であるため、 $P(x)=3x^3-9x^2+7x$ より、求める多項式は、

$$\begin{aligned}P\bigl(Q(x)\bigr)&=3\bigl(Q(x)\bigr)^3-9\bigl(Q(x)\bigr)^2+7Q(x)\\&=3\bigl(8x^6+12x^4+6x^2+1\bigr)-9\bigl(4x^4+4x^2+1\bigr)+7\bigl(2x^2+1\bigr)\\&=24x^6-4x^2+1\end{aligned}$$

である。

(2)(i)

$$g(x)=\int_0^xf(t)dt,h(x)=\int_x^1f(t)dtより、$$

$$\begin{aligned}g(x)+h(x)&=\int_0^xf(t)dt+\int_x^1f(t)dt\\&=\int_0^1f(t)dt\\&=g(1)\\&=a\end{aligned}$$

となる。ここで、 $f(x)$ は0でない多項式であるため、 $g(x),h(x)$ は定数でない多項式であ

る。また、 $P(x)=g(x)-\{x^3+b(a-x)^2+cx+d\}$ と定めると、 $P(x)$ は多項式であり、

$$\begin{aligned}P\bigl(h(x)\bigr)&=g\bigl(h(x)\bigr)-\bigl\{\bigl\{h(x)\bigr\}^3+b\bigl\{a-h(x)\bigr\}^2+ch(x)+d\bigr\}\\&=g\bigl(h(x)\bigr)-\bigl\{\bigl\{h(x)\bigr\}^3+b\bigl\{g(x)\bigr\}^2+ch(x)+d\bigr\}\end{aligned}$$

となるため、条件より $P\bigl(h(x)\bigr)=0$ は x についての恒等式である。また、 $h(x)$ は定数でない

多項式であるから、(1)(ii)より、 $P(x)$ の各項の係数はいずれも0である。すなわち、 $P(x)=0$ が x についての恒等式となるから、

$$g(x)=x^3+b(a-x)^2+cx+d$$

が成り立つ。したがつて、 $g(x)$ は3次式である。また、

$$g'(x)=3x^2+2b(x-a)+c$$

となるため、

$$\begin{aligned}g(0)&=0^3+b(a-0)^2+c\cdot 0+d=a^2b+d\\g(1)&=1^3+b(a-1)^2+c\cdot 1+d=b(a-1)^2+c+d+1\\g'(1)&=3\cdot 1^2+2b(1-a)+c=-2(a-1)b+c+3\end{aligned}$$

である。一方、 $g(x)=\int_0^xf(t)dt$ より、

$$\begin{aligned}g(0)&=\int_0^0f(t)dt=0\end{aligned}$$

であり、 a の定義より、

$$g(1)=a$$

である。また、微分積分学の基本定理より、 $g'(x)=f(x)$ となるため、条件より、

$$g'(1)=f(1)=2(1-a)$$

となる。よつて、

$$\begin{aligned}g(0)&=0\\\Leftrightarrow a^2b+d&=0\\\therefore d&=-a^2b\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}g(1)&=a\\\Leftrightarrow b(a-1)^2+c+d+1&=a\\\Leftrightarrow b(a-1)^2+c+(-a^2b)+1&=a\\\therefore c&=(2a-1)b+a-1\end{aligned}$$

となるため、

$$\begin{aligned}g'(1)&=2(1-a)\\\Leftrightarrow -2(a-1)b+c+3&=2(1-a)\\\Leftrightarrow -2(a-1)b+\{(2a-1)b+a-1\}+3&=2-2a\\\therefore b&=-3a\end{aligned}$$

となる。したがつて、

$$\begin{aligned}c&=(2a-1)b+a-1\\&=(2a-1)\cdot(-3a)+a-1\\&=-6a^2+4a-1\\d&=-a^2b\\&=-a^2\cdot(-3a)\\&=3a^3\end{aligned}$$

となる。

(ii)

(2)(i)より、

$$\begin{aligned}g(x)&=x^3+b(a-x)^2+cx+d\\&=x^3+(-3a)(a-x)^2+(-6a^2+4a-1)x+3a^3\\&=x^3-3ax^2+(4a-1)x\end{aligned}$$

となるため、

$$g'(x)=3x^2-6ax+4a-1$$

である。 x についての2次方程式 $g'(x)=0$ の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned}D&=(-6a)^2-4\cdot 3\cdot(4a-1)\\&=36a^2-48a+12\\&=12(3a^2-4a+1)\\&=36\left(a-\frac{1}{3}\right)(a-1)\end{aligned}$$

となる。ここで、 $g'(x)$ は連続であるため、関数 $g(x)$ が極値をもつための必要十分条件は、関数 $y=g'(x)$ のグラフが y 軸と交点をもつことであり、 $g'(x)$ は2次関数であるため、これは関数 $y=g'(x)$ のグラフが y 軸と異なる2点で交わること、すなわち、 $D>0$ と同値である。よつて、関数 $g(x)$ が極値をもつための必要十分条件は、

$$\begin{aligned}D>0\\\therefore a<\frac{1}{3}\text{または}a>1\end{aligned}$$

である。このとき、

$$\begin{aligned}g'(x)&=3x^2-6ax+4a-1\\&=3(x-a)^2-3a^2+4a-1\\&=3(x-a)^2-\frac{D}{12}\\&=3\left\{(x-a)^2-\frac{D}{36}\right\}\\&=3\left(x-a-\frac{\sqrt{D}}{6}\right)\left(x-a+\frac{\sqrt{D}}{6}\right)\end{aligned}$$

となるため、

$$\begin{aligned}\alpha&=a-\frac{\sqrt{D}}{6}=a-\frac{\sqrt{3(3a^2-4a+1)}}{3}\\\beta&=a+\frac{\sqrt{D}}{6}=a+\frac{\sqrt{3(3a^2-4a+1)}}{3}\end{aligned}$$

とすると、関数 $g(x)$ の増減は下表の通りである。

x	...	α	...	β	...
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	$g(\beta)$	$\nearrow$

上表より、関数 $g(x)$ は $x=\alpha=a-\frac{\sqrt{3(3a^2-4a+1)}}{3}$ のとき、極大値 $M=g(\alpha)$ をとる。また、

$$\begin{aligned}g(x)-M&=g(x)-g(\alpha)\\&=\{x^3-3ax^2+(4a-1)x\}-\{\alpha^3-3a\alpha^2+(4a-1)\alpha\}\\&=(x^3-\alpha^3)-3a(x^2-\alpha^2)+(4a-1)(x-\alpha)\\&=(x^2+\alpha x+\alpha^2)(x-\alpha)-3a(x+\alpha)(x-\alpha)+(4a-1)(x-\alpha)\\&=\{(x^2+\alpha x+\alpha^2)-3a(x+\alpha)+(4a-1)\}(x-\alpha)\end{aligned}$$

であり、 $g'(x)=3x^2-6ax+4a-1=3(x-\alpha)(x-\beta)$ より、

$$\begin{aligned}&\{(x^2+\alpha x+\alpha^2)-3a(x+\alpha)+(4a-1)\}\\&=x^2+(\alpha-3a)x+(\alpha^2-3a\alpha+4a-1)\\&=(x^2-\alpha^2)+(\alpha-3a)(x-\alpha)+\{\alpha^2+\alpha(\alpha-3a)+(\alpha^2-3a\alpha+4a-1)\}\\&=(x+\alpha)(x-\alpha)+(\alpha-3a)(x-\alpha)+(3\alpha^2-6a\alpha+4a-1)\\&=\{(x+\alpha)+(\alpha-3a)\}(x-\alpha)+g'(\alpha)\\&=\{x-(3a-2\alpha)\}(x-\alpha)+0\\&=\{x-(3a-2\alpha)\}(x-\alpha)\end{aligned}$$

である。さらに、

$$3a-2\alpha=3a-2\left\{a-\frac{\sqrt{3(3a^2-4a+1)}}{3}\right\}=a+\frac{2\sqrt{3(3a^2-4a+1)}}{3}$$

より、

$$\begin{aligned}g(x)-M&=\{(x^2+\alpha x+\alpha^2)-3a(x+\alpha)+(4a-1)\}(x-\alpha)\\&=\{x-(3a-2\alpha)\}(x-\alpha)^2\\&=\left[x-\left\{a+\frac{2\sqrt{3(3a^2-4a+1)}}{3}\right\}\right](x-\alpha)^2\end{aligned}$$

が成り立つ。よつて、方程式 $g(x)=M$ の解は $x=\alpha=a-\frac{\sqrt{3(3a^2-4a+1)}}{3}$ と

$$x=a+\frac{2\sqrt{3(3a^2-4a+1)}}{3}\text{である。}$$

(iii)

$$g(x)=x^3-3ax^2+(4a-1)xより、$$

$$\begin{aligned}g(a)&=a^3-3a\cdot a^2+(4a-1)\cdot a\\&=-2a^3+4a^2-a\end{aligned}$$

であり、 $g'(x)=3x^2-6ax+4a-1$ より、

$$\begin{aligned}g'(a)&=3a^2-6a\cdot a+4a-1\\&=-3a^2+4a-1\end{aligned}$$

である。よつて、曲線 $y=g(x)$ 上の点 $(a,g(a))$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned}y&=g'(a)(x-a)+g(a)\\\Leftrightarrow y&=(-3a^2+4a-1)(x-a)+(-2a^3+4a^2-a)\\\therefore y&=(-3a^2+4a-1)x+a^3\end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned}g(x)-(-3a^2+4a-1)x-a^3&=2(x-a)\\&=\{x^3-3ax^2+(4a-1)x\}-(-3a^2+4a-1)x-a^3-2(x-a)\\&=x^3-3ax^2+3a^2x-a^3-2(x-a)\\&=(x-a)^3-2(x-a)\\&=\{(x-a)^2+2\}\{(x-a)\}\end{aligned}$$

となるため、

$$\begin{aligned}F(a)&=\int_0^a\{g(x)-(-3a^2+4a-1)x-a^3-2(x-a)\}e^{\frac{(x-a)^2}{2}}dx\\&=\int_0^a\{(x-a)^2+2\}\{(x-a)\}e^{\frac{(x-a)^2}{2}}dx\\&=\int_0^a\{(x-a)^2+2\}\cdot\frac{d}{dx}e^{\frac{(x-a)^2}{2}}dx\\&=\left[\{(x-a)^2+2\}\cdot e^{\frac{(x-a)^2}{2}}\right]_0^a-\int_0^a\frac{d}{dx}\{(x-a)^2+2\}\cdot e^{\frac{(x-a)^2}{2}}dx\\&=2-\left(-a^2+2\right)e^{\frac{a^2}{2}}-\int_0^a2\{(x-a)\}e^{\frac{(x-a)^2}{2}}dx\\&=2-\left(-a^2+2\right)e^{\frac{a^2}{2}}+\left[-2e^{\frac{(x-a)^2}{2}}\right]_0^a\\&=2-\left(-a^2+2\right)e^{\frac{a^2}{2}}+\left\{-2-\left(-2e^{\frac{a^2}{2}}\right)\right\}\\&=a^2e^{\frac{a^2}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{である。したがつて、}\\F'(a)&=2a\cdot e^{\frac{a^2}{2}}+a^2\cdot\left(-ae^{\frac{a^2}{2}}\right)\\&=-a(a^2-2)e^{\frac{a^2}{2}}\\&=-a(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})e^{\frac{a^2}{2}}\end{aligned}$$

となるため、 a の関数 $F(a)$ の増減は下表の通りである。

a	...	$-\sqrt{2}$	...	0	...	$\sqrt{2}$	...
$F'(a)$	+	0	−	0	+	0	−
$F(a)$	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$

また、

$$\lim_{a\rightarrow\infty}F(a)=\lim_{a\rightarrow-\infty}F(a)=0$$

となるため、関数 $y=F(a)$ のグラフは次図の通りである。

前図より、 a の関数 $F(a)$ は $a=\pm\sqrt{2}$ のとき、最大値 $\frac{2}{e}$ をとる。

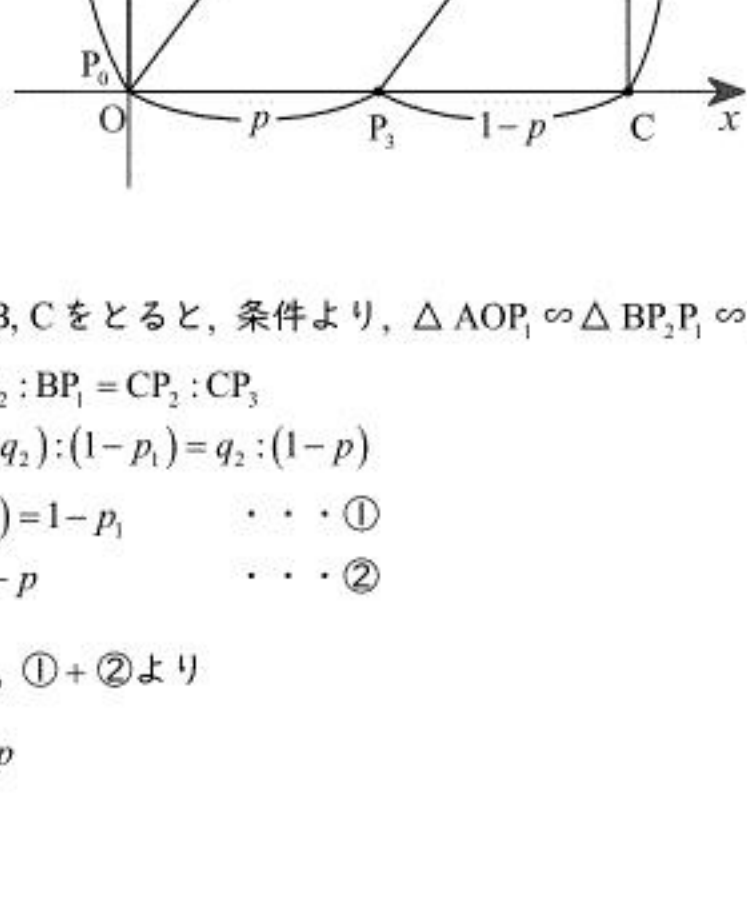
【Ⅳ】

【解答】

(1)		(あ)	(い)	(う)	(え)	(お)
		$\frac{2-p}{2}$	$\frac{2(1-p)}{2-p}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2p}{2-p}$	$\frac{3p-2}{2}$
(2)	(i)	(か)				
		$\frac{a_1}{b_1}$				
	(ii)	(き)	(く)	(け)	(こ)	(さ)
		$\frac{a}{2}$	$\frac{2-b}{2}$	$\frac{a}{2-b}$	$\frac{2(1-b)}{2-b}$	$\frac{2}{3}$
		(し)	(す)	(せ)	(そ)	
		$2(1-a)$	$\frac{2(1-a)}{a}$	$\frac{3}{2}a$	$\frac{3b-2}{2}$	

【解説】

(1)



図のように、3点A, B, Cをとると、条件より、 $\triangle AOP_1 \sim \triangle BP_2P_1 \sim \triangle CP_3P_2$ であるから

$$\begin{aligned} AO:AP_1 &= BP_2:BP_1 = CP_3:CP_2 \\ \Leftrightarrow 1:p_1 &= (1-q_2):(1-p_1) = q_2:(1-p) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} p_1(1-q_2) &= 1-p_1 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ p_1q_2 &= 1-p & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases} \end{aligned}$$

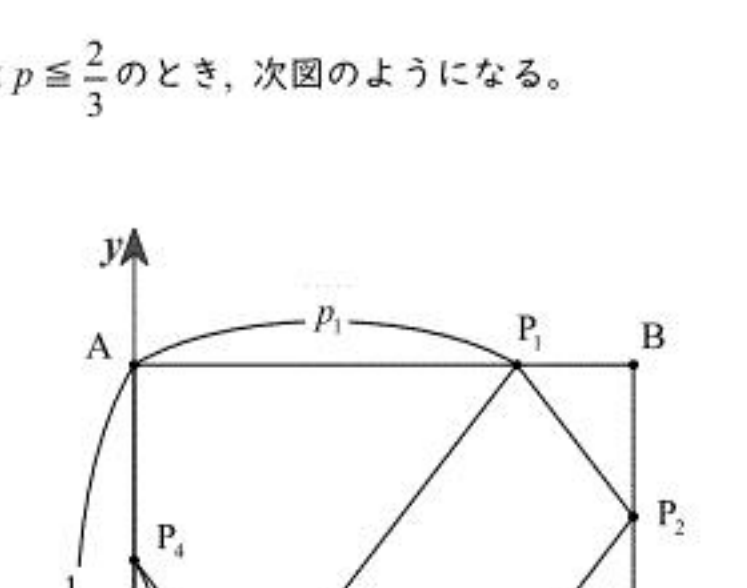
が成立する。よって、 $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ より

$$\begin{aligned} p_1 &= 2-p_1-p \\ \therefore p_1 &= \frac{2-p}{2} \end{aligned}$$

である。また、これを $\textcircled{2}$ に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{2-p}{2} \cdot q_2 &= 1-p \\ \therefore q_2 &= \frac{2(1-p)}{2-p} \end{aligned}$$

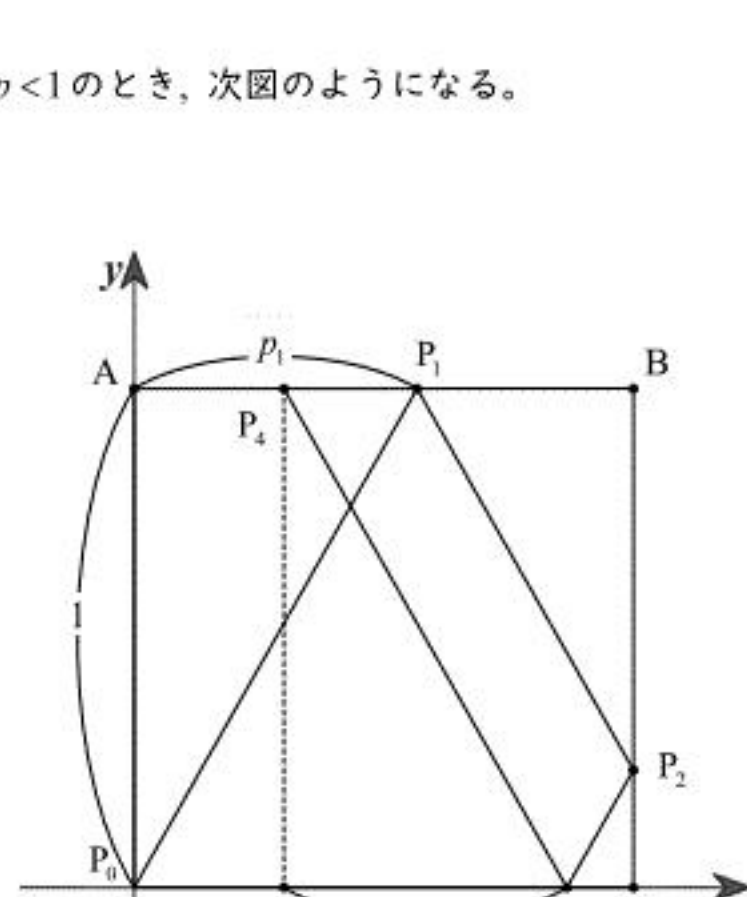
である。さらに、 $(p_1, q_1) = (0, 1)$ となると、次図のようになる。



このとき、 $\triangle AOP_1 \equiv \triangle OAP_3$ であるから

$$\begin{aligned} p_1 &= p \\ \Leftrightarrow \frac{2-p}{2} &= p \\ \therefore p &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

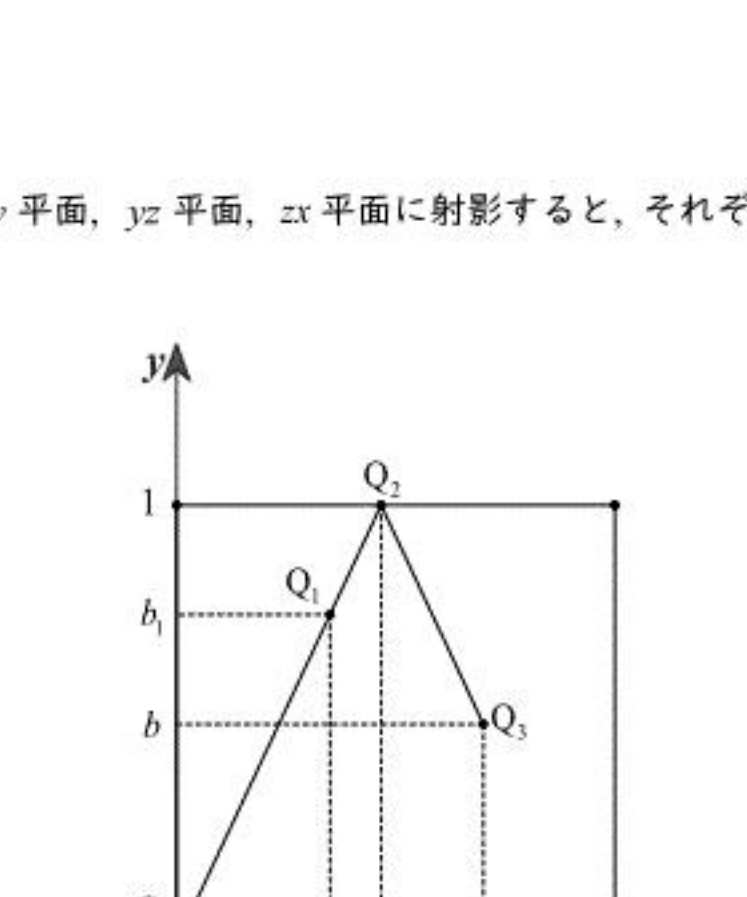
となる。よって、 $0 < p \leq \frac{2}{3}$ のとき、次図のようになる。



このとき、 $\triangle AOP_1 \sim \triangle OP_4P_3$ であるから、

$$\begin{aligned} AO:AP_1 &= OP_4:OP_3 \\ \Leftrightarrow 1:p_1 &= q_4:p \\ \Leftrightarrow p_1q_4 &= p \\ \Leftrightarrow \frac{2-p}{2} \cdot q_4 &= p \\ \therefore q_4 &= \frac{2p}{2-p} \end{aligned}$$

である。また、 $\frac{2}{3} \leq p < 1$ のとき、次図のようになる。



このとき、点P4からx軸に下ろした垂線の足を点Dとすると、 $\triangle AOP_1 \equiv \triangle DP_4P_3$ であるから

$$\begin{aligned} DP_3 &= AP_1 \\ \Leftrightarrow p-p_4 &= p_1 \\ \Leftrightarrow p_4 &= p-\frac{2-p}{2} \\ \therefore p_4 &= \frac{3p-2}{2} \end{aligned}$$

である。

(2)(i)

2点 $(0, 0, 0), (a_1, b_1, 0)$ を通る直線上の点の座標は、実数 t を用いて

$$(ta_1, tb_1, 0)$$

と表せる。ここで

$$tb_1 = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{b_1} \quad (\because b_1 \neq 0)$$

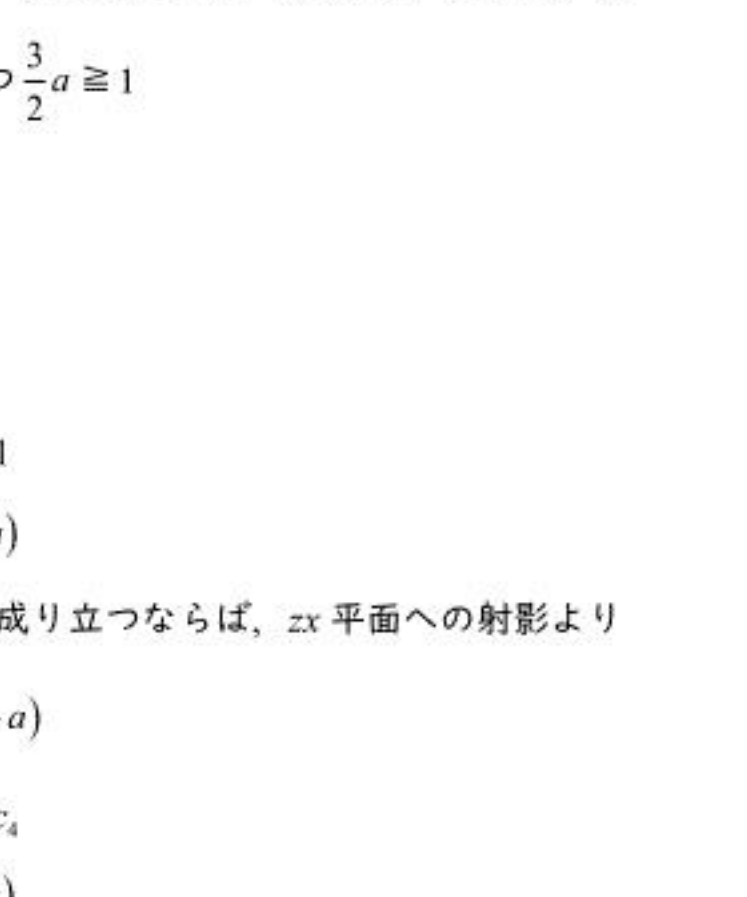
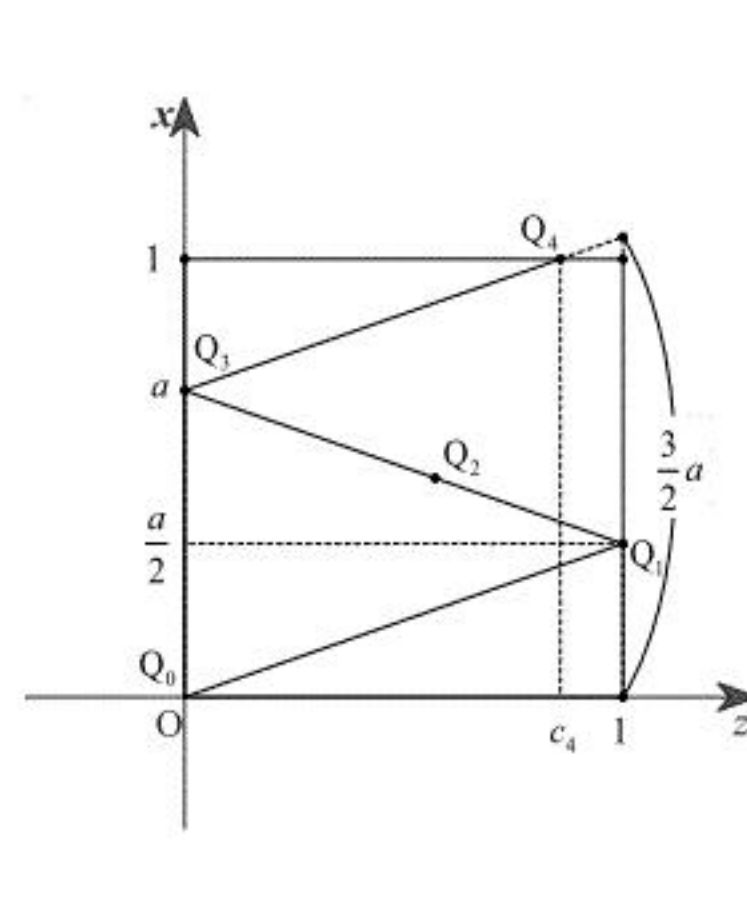
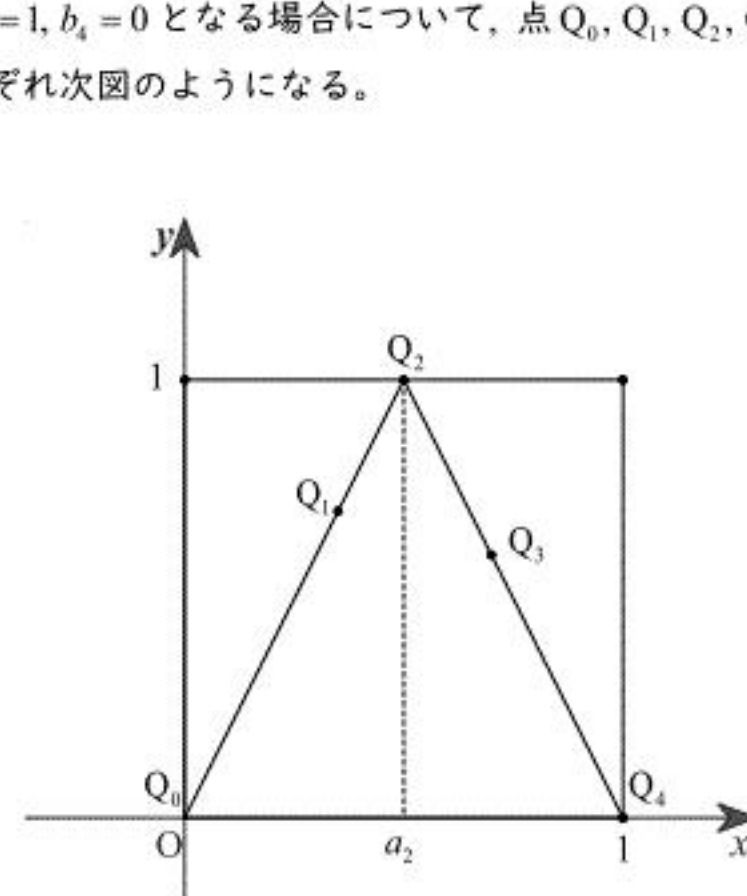
より、この直線と平面 $y=1$ が交わる点の座標は、

$$\left(\frac{a_1}{b_1}, 1, 0 \right)$$

と表せる。

(ii)

点 Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 を xy 平面、 yz 平面、 zx 平面に射影すると、それぞれ次図のようになる。



以上より、 $a_4=1, b_4=0$ となる必要十分条件は、対称性から

$$\begin{aligned} 0 < a \leq 1 \text{ かつ } \frac{3}{2}a &\geq 1 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3} &\leq a < 1 \end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned} 2a_2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{a}{2-b} &= 1 \\ \Leftrightarrow b &= 2(1-a) \end{aligned}$$

である。この条件が成り立つならば、 zx 平面への射影より

$$\begin{aligned} 1:\frac{a}{2} &= c_4:(1-a) \\ \Leftrightarrow 1-a &= \frac{a}{2} \cdot c_4 \\ \therefore c_4 &= \frac{2(1-a)}{a} \end{aligned}$$

である。また、 $0 < a \leq \frac{2}{3}$ かつ $\frac{2}{3} \leq b < 1$ である場合について、点 Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 を yz 平面、 zx 平面に射影すると、それぞれ次図のようになる。



このとき、対称性から、 zx 平面への射影より

$$a_4 = \frac{3}{2}a$$

である。また、 yz 平面への射影より、(1)で求めた $\frac{2}{3} \leq p < 1$ のときの p_4 と同様に計算すると

$$b_4 = \frac{3b-2}{2}$$

である。