

1

(1)

3 数 (a, b, c) の組の総数は

$$6^3 \text{ 通り}$$

であり、これらは同様に確からしい。3 数 (a, b, c) がすべて異なる組の個数は、1 から 6 までの数字の中から異なる 3 個を選んで並べ、左から a, b, c とすると考えれば、

$${}_6P_3 \text{ 通り}$$

存在すると分かる。従って、求める確率は、

$$\frac{{}_6P_3}{6^3} = \frac{5}{9}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{5}{9}$$

(2)

3 数 (a, b, c) がすべて 3 以上になる組の個数は、3 から 6 までの数字の中から重複を許して 3 個を選んで並べ、左から a, b, c とすると考えれば、

$$4^3 \text{ 通り}$$

存在すると分かる。従って、求める確率は、

$$\frac{4^3}{6^3} = \frac{8}{27}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{5}{9}$$

(3)

3 数 (a, b, c) の最小値が 3 となるという事象全体は、3 数 (a, b, c) がすべて 3 以上になるという事象全体から、3 数 (a, b, c) がすべて 4 以上になるという事象全体を除いたものである。3 数 (a, b, c) がすべて 4 以上になる組の個数は、4 から 6 までの数字の中から重複を許して 3 個を取って並べ、左から a, b, c とすると考えれば、

$$3^3 \text{ 通り}$$

存在すると分かる。これと(2)より、3 数 (a, b, c) の最小値が 3 となる組の個数は

$$(4^3 - 3^3) \text{ 通り}$$

である。従って、求める確率は、

$$\frac{4^3 - 3^3}{6^3} = \frac{37}{216}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{37}{216}$$

(4)

まず、3 数 (a, b, c) のうちの 2 数の和がもう 1 つの数に等しくなる組の個数を考える。同じ数を含むかどうかで場合分けを行う。

[1] 同じ数を含まないとき

3 数 (a, b, c) のうちの 2 数の和がもう 1 つの数に等しくなる組を、小さい順に並び替えたものをすべて列挙すると、

$$(1, 2, 3), (1, 3, 4), (1, 4, 5), (1, 5, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 6)$$

の 6 通り存在する。各々の組について、3 数 (a, b, c) の並べ方は $3!$ 通り存在するため、条件を満たす 3 数 (a, b, c) の組の個数は、

$$6 \cdot 3! \text{ 通り}$$

である。

[2] 同じ数を含むとき

3 数 (a, b, c) のうちの 2 数の和がもう 1 つの数に等しくなる組を、小さい順に並び替えたものをすべて列挙すると、

$$(1, 1, 2), (2, 2, 4), (3, 3, 6)$$

の 3 通り存在する。各々の組について、3 数 (a, b, c) の並べ方は 3 通り存在するため、条件を満たす 3 数 (a, b, c) の組の個数は、

$$3 \cdot 3 \text{ 通り}$$

である。

以上、[1], [2] より、求める確率は、

$$\frac{6 \cdot 3! + 3 \cdot 3}{6^3} = \frac{5}{24}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{5}{24}$$

(5)

まず、3 数 (a, b, c) のうちの 2 数の和がもう 1 つの数より小さくなる組の個数を考える。同じ数を含むかどうかで場合分けを行う。

[1] 同じ数を含まないとき

3 数 (a, b, c) のうちの 2 数の和がもう 1 つの数より小さくなる組を、小さい順に並び替えたものをすべて列挙すると、

$$(1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 3, 6), (1, 4, 6), (2, 3, 6)$$

の 7 通り存在する。各々の組について、3 数 (a, b, c) の並べ方は $3!$ 通り存在するため、条件を満たす 3 数 (a, b, c) の組の個数は、

$$7 \cdot 3! \text{ 通り}$$

である。

[2] 同じ数を含むとき

3 数 (a, b, c) のうちの 2 数の和がもう 1 つの数より小さくなる組を、小さい順に並び替えたものをすべて列挙すると、

$$(1, 1, 3), (1, 1, 4), (1, 1, 5), (1, 1, 6), (2, 2, 5), (2, 2, 6)$$

の 6 通り存在する。各々の組について、3 数 (a, b, c) の並べ方は 3 通り存在するため、条件を満たす 3 数 (a, b, c) の組の個数は、

$$6 \cdot 3 \text{ 通り}$$

である。

以上、[1], [2] より、求める確率は、

$$\frac{7 \cdot 3! + 6 \cdot 3}{6^3} = \frac{5}{18}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{5}{18}$$

6)

3 数 (a, b, c) を 3 辺とする三角形を作ることができる組の個数を考える。ここで、命題「3 数 (a, b, c) を 3 辺とする三角形を作ることができる」について、

$$\text{「3 数 } (a, b, c) \text{ を 3 辺とする三角形を作ることができる」}$$

$$\Leftrightarrow \text{「} a+b>c \text{ かつ } b+c>a \text{ かつ } c+a>b \text{」}$$

という同値な言い換えが可能である。また、この否定命題は、

$$\text{「} a+b \leq c \text{ または } b+c \leq a \text{ または } c+a \leq b \text{」}$$

であるが、これは(4)の事象と(5)の事象の和事象である。ここで、(4)の事象と(5)の事象は互いに排反な事象であるから、

$$a+b \leq c \text{ または } b+c \leq a \text{ または } c+a \leq b$$

となる確率は、

$$\frac{5}{24} + \frac{5}{18}$$

である。題意の事象はこの余事象であるから、求める確率は、

$$1 - \left(\frac{5}{24} + \frac{5}{18} \right) = \frac{37}{72}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{37}{72}$$

2

(1)

題意より、点 P の座標は、 $P(p, p^2 - 4p + 3)$ であることから、

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \overline{AP} &= \begin{pmatrix} p \\ p^2 - 4p + 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= (p-4) \begin{pmatrix} 1 \\ p \end{pmatrix} \\ \overline{BP} &= \begin{pmatrix} p \\ p^2 - 4p + 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= (p-2) \begin{pmatrix} 1 \\ p-2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

が成り立つ。従って、

$$\begin{aligned}|\overline{AB}|^2 |\overline{AP}|^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AP})^2 &= (-2)^2 (1^2 + 2^2) (p-4)^2 (1^2 + p^2) - \{-2(p-4)(1 \cdot 1 + 2p)\}^2 \\ &= 20(p-4)^2 (1+p^2) - 4(p-4)^2 (1+2p)^2 \\ &= 4(p-4)^2 \{5(1+p^2) - (1+2p)^2\} \\ &= 4(p-4)^2 (p-2)^2\end{aligned}$$

が得られるので、 $\triangle ABP$ の面積を S とすると、

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{AB}|^2 |\overline{AP}|^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AP})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{4(p-4)^2 (p-2)^2} \\ &= |(p-4)(p-2)|\end{aligned}$$

である。従って、

$$\begin{aligned}S &= 15 \\ \Leftrightarrow |(p-4)(p-2)| &= 15 \\ \Leftrightarrow (p-4)(p-2) &= \pm 15\end{aligned}$$

である。

[1] $(p-4)(p-2) = 15$ のとき

このとき、

$$\begin{aligned}(p-4)(p-2) &= 15 \\ \Leftrightarrow (p-7)(p+1) &= 0 \\ \therefore p &= 7, -1\end{aligned}$$

である。

[2] $(p-4)(p-2) = -15$ のとき

このとき、

$$\begin{aligned}(p-4)(p-2) &= -15 \\ \Leftrightarrow (p-3)^2 + 14 &= 0\end{aligned}$$

であるが、

$$(p-3)^2 + 14 > 0$$

であるため、この方程式に実数解は存在しない。

以上、[1], [2]より、条件を満たす p の値は、

$$p = 7, -1$$

である。従って、求める点 P の座標は、

$$(7, 24), (-1, 8)$$

である。

(答) $(7, 24), (-1, 8)$

(2)

3点 A, B, P は曲線 C 上に存在するため、線分 AB, AP, BP が y 軸と平行になることはない。(1)

より、線分 AB, AP, BP の傾きは、それぞれ、

$$2, p, p-2$$

である。以下、 $\triangle ABP$ のどの角が直角になるかで場合分けを行う。

[1] $\angle A = 90^\circ$ のとき

このとき、線分 AB, AP が直角なので、

$$2p = -1 \therefore p = -\frac{1}{2}$$

である。従って、点 P の座標は、

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{21}{4}\right)$$

である。

[2] $\angle B = 90^\circ$ のとき

このとき、線分 AB, BP が直角なので、

$$2(p-2) = -1 \therefore p = \frac{3}{2}$$

である。従って、点 P の座標は、

$$\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$$

である。

[3] $\angle P = 90^\circ$ のとき

このとき、線分 AP, BP が直角なので、

$$p(p-2) = -1 \therefore p = 1$$

である。従って、点 P の座標は、

$$(1, 0)$$

である。

以上、[1], [2], [3]より、求める P の座標は、

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{21}{4}\right), \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right), (1, 0)$$

である。

(答) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{21}{4}\right), \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right), (1, 0)$

3

(1)

$S_1 = a_1$ であることと、与えられた条件式より、

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{1}{6}a_1^2 + \frac{1}{2}a_1 - \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow (a_1 - 4)(a_1 + 1) &= 0 \\ \therefore a_1 &= 4 \quad (\because a_1 > 0)\end{aligned}$$

を得る。また、 $S_2 = a_1 + a_2$ であることと、与えられた条件式より、

$$\begin{aligned}a_1 + a_2 &= \frac{1}{6}a_2^2 + \frac{1}{2}a_2 - \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{6}a_2^2 - \frac{1}{2}a_2 - \frac{14}{3} &= 0 \\ \Leftrightarrow (a_2 + 4)(a_2 - 7) &= 0 \\ \therefore a_2 &= 7 \quad (\because a_2 > 0)\end{aligned}$$

を得る。

(答) $a_1 = 4, a_2 = 7$

(2)

題意より、

$$\begin{aligned}S_{n+1} &= \frac{1}{6}a_{n+1}^2 + \frac{1}{2}a_{n+1} - \frac{2}{3} \\ S_n &= \frac{1}{6}a_n^2 + \frac{1}{2}a_n - \frac{2}{3}\end{aligned}$$

が成り立つ。これら 2 式の差を取ることで、

$$\begin{aligned}S_{n+1} - S_n &= \frac{1}{6}(a_{n+1}^2 - a_n^2) + \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= \frac{1}{6}(a_{n+1}^2 - a_n^2) + \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) \quad (\because S_{n+1} - S_n = a_{n+1}) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{6}(a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n) - \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{6}(a_{n+1} + a_n)\{(a_{n+1} - a_n) - 3\} &= 0 \\ \therefore a_{n+1} - a_n &= 3 \quad (\because a_{n+1} + a_n > 0)\end{aligned}$$

を得る。従って、数列 $\{a_n\}$ は、初項 4、公差 3 の等差数列であるから、

$$a_n = 3n + 1$$

である。

(答) $a_{n+1} - a_n = 3, a_n = 3n + 1$

(3)

(2) と題意より、

$$\begin{aligned}T_n &= \sum_{k=1}^n \frac{3}{(3k+1)(3k+4)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3k+1} - \frac{1}{3k+4} \right) \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+4} \right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{3n+4} \\ &= \frac{3n}{4(3n+4)}\end{aligned}$$

が得られる。

(答) $T_n = \frac{3n}{4(3n+4)}$

(4)

(3) より、

$$T_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{3n+4}$$

である。ここで、数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = -\frac{1}{3n+4}$$

と定義すると、

$$\begin{aligned}b_{n+1} - b_n &= -\frac{1}{3(n+1)+4} + \frac{1}{3n+4} \\ &= \frac{3}{(3n+4)(3n+7)} \\ &> 0\end{aligned}$$

より、 $\{b_n\}$ は n の単調増加数列である。これと、

$$b_1 = -\frac{1}{7}, \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$$

であることから、

$$-\frac{1}{7} \leq b_n < 0$$

$$\therefore \frac{3}{28} \leq T_n < \frac{1}{4} \quad \left(\because T_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{3n+4} \right)$$

であることが分かる。

(証明終)