

〔解答〕

- ア $\frac{1}{10}$
- イ $\frac{1}{120}$
- ウ $\frac{9}{40}$
- エ $\frac{7}{30}$
- オ $\frac{13}{42}$
- カ $\frac{5}{14}$

〔解説〕

- (1)
- 一回目の試行で赤球を取り出す確率は $\frac{1}{10}$ である。
- (2)
- 一回目の試行で赤球を取り出す確率は $\frac{1}{10}$ であり、その際箱の外から白球二つを箱の中に追加するので、二回目の試行では赤球 1 個、白球 11 個の合計 12 個の中から一つの球を選び出すことになる。よって求める確率は
- $$\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{120}$$
- である。同様に考えると一回目の試行で白球を取り出し、二回目の試行で赤球を取り出す確率は
- $$\frac{9}{10} \cdot \frac{3}{12} = \frac{9}{40}$$
- である。これらは排反事象であるから、二回目の試行で赤球を取り出す確率は
- $$\frac{9}{40} + \frac{1}{120} = \frac{7}{30}$$
- である。
- (3)
- 三回目の試行で赤球を取り出す確率は次のように場合分けして求めることができる。
- [1]赤→赤→赤と取り出す場合
- $$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{14} = \frac{1}{1680}$$
- [2]赤→白→赤と取り出す場合
- $$\frac{1}{10} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{3}{14} = \frac{11}{560}$$
- [3]白→白→赤と取り出す場合
- $$\frac{9}{10} \cdot \frac{9}{12} \cdot \frac{5}{14} = \frac{9}{112}$$
- [4]白→赤→赤と取り出す場合。
- $$\frac{9}{10} \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{14} = \frac{27}{560}$$
- 以上の四つの場合は排反であるから、三回目の試行で赤球を取り出す確率は
- $$\frac{27}{560} + \frac{9}{112} + \frac{11}{560} + \frac{1}{1720} = \frac{13}{42}$$
- となる。

- (4)
- 四回目の試行で赤球を取り出す確率は以下のように 8 通りに場合分けすることができる。

一回目	二回目	三回目	四回目	確率($\times \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{14} \cdot \frac{1}{16}$)
赤	赤	赤	赤	$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
赤	赤	白	赤	$1 \cdot 1 \cdot 13 \cdot 3 = 39$
赤	白	赤	赤	$1 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 3 = 99$
赤	白	白	赤	$1 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 5 = 605$
白	赤	赤	赤	$9 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$
白	赤	白	赤	$9 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 5 = 1485$
白	白	赤	赤	$9 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 5 = 2025$
白	白	白	赤	$9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 7 = 5103$

これらは全て排反事象であるから、四回目に赤球を取り出す確率は、

$$\frac{1+39+99+605+243+1485+2025+5103}{10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16} = \frac{5}{14}$$

となる。

(1)

$$\begin{aligned}
 & (k^4 + 2k^2 + 1)x^2 + (k^4 + 2k^2 + 1)y^2 - 8(k^2 + 1)x - 8(k^3 + k)y + 32k^2 - 16k - 16 = 0 \\
 & \Leftrightarrow (k^2 + 1)^2 x^2 - 8(k^2 + 1)x + (k^2 + 1)^2 y^2 - 8k(k^2 + 1)y + 32k^2 - 16k - 16 = 0 \\
 & \Leftrightarrow \left(x - \frac{4}{k^2 + 1}\right)^2 + \left(y - \frac{4k}{k^2 + 1}\right)^2 = \frac{16(-k^2 + k + 2)}{(k^2 + 1)^2}
 \end{aligned}$$

となるから、点Pの座標は $\left(\frac{4}{k^2 + 1}, \frac{4k}{k^2 + 1}\right)$ 、半径Rは $\frac{4}{(k^2 + 1)}\sqrt{-k^2 + k + 2}$ である。

$$(答) \ P \left(\frac{4}{k^2 + 1}, \frac{4k}{k^2 + 1} \right), \ R = \frac{4}{(k^2 + 1)}\sqrt{-k^2 + k + 2}$$

(2)

(1)より、 k が満たすべき条件は

$$\begin{aligned}
 & -k^2 + k + 2 > 0 \\
 & \Leftrightarrow (k - 2)(k + 1) < 0 \\
 & \Leftrightarrow -1 < k < 2
 \end{aligned}$$

である。

$$(答) -1 < k < 2$$

(3)

$X = \frac{4}{k^2 + 1}, Y = \frac{4k}{k^2 + 1}$ とおくと、(2)より $\frac{4}{5} < X \leq 4$ である。ここで

$$\begin{aligned}
 & X = \frac{4}{k^2 + 1} \\
 & \Leftrightarrow k^2 = \frac{4}{X} - 1
 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
 & Y = \frac{4k}{k^2 + 1} \\
 & \Rightarrow Y^2 = \frac{16k^2}{(k^2 + 1)^2} = \frac{16\left(\frac{4}{X} - 1\right)}{\left(\frac{4}{X}\right)^2} = -X^2 + 4X \\
 & \Leftrightarrow (X - 2)^2 + Y^2 = 4
 \end{aligned}$$

となる。よって求める軌跡の方程式は $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ である。

$$(答) (x - 2)^2 + y^2 = 4$$

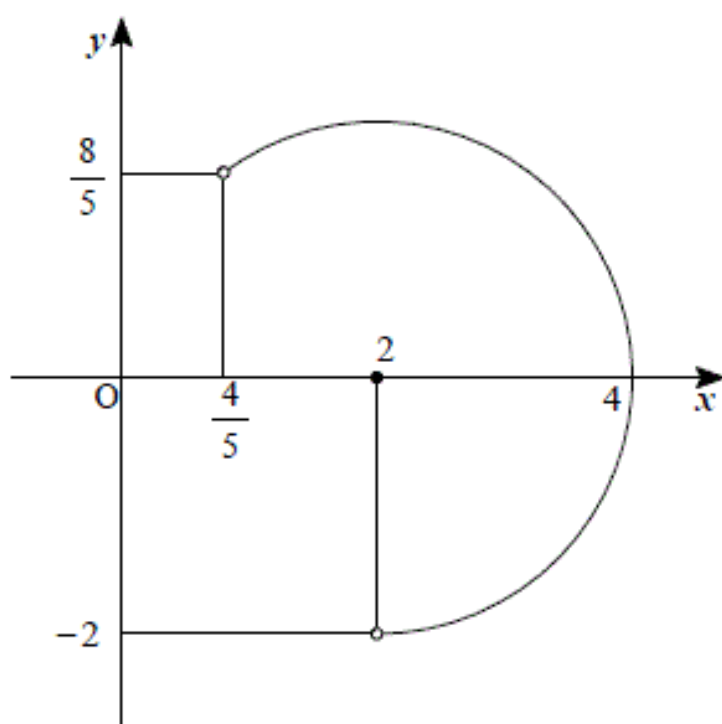
(4)

$$\begin{cases} x = \frac{4}{k^2 + 1} \\ y = \frac{4k}{k^2 + 1} \end{cases}$$

において、 $k = \tan \theta (-\pi < \theta < \pi)$ とおくと

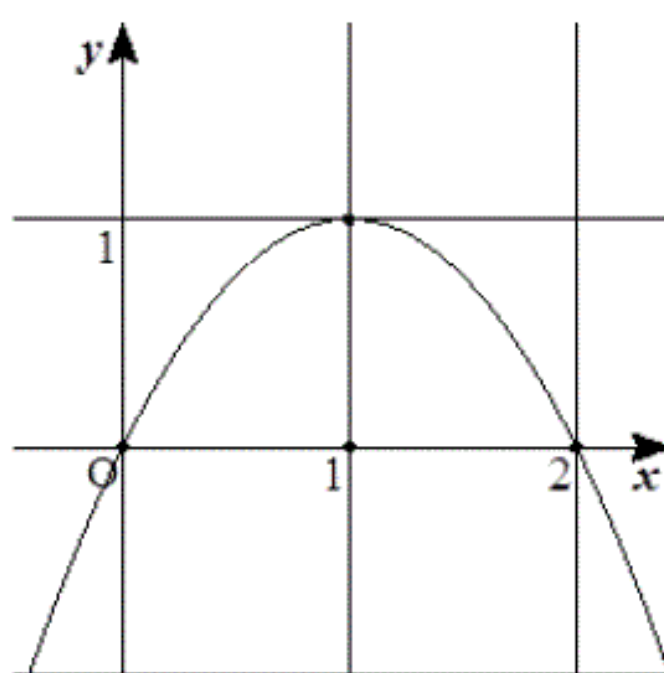
$$\begin{aligned}
 x &= \frac{4}{\tan^2 \theta + 1} \\
 &= 4 \cos^2 \theta \\
 &= 2 + 2 \cos 2\theta \\
 y &= \frac{4 \tan \theta}{\tan^2 \theta + 1} \\
 &= 4 \sin \theta \cos \theta \\
 &= 2 \sin 2\theta
 \end{aligned}$$

となる。(2)より $-1 < \tan \theta < 2$ であることに注意して点Pの軌跡を図示すると次のようになる。

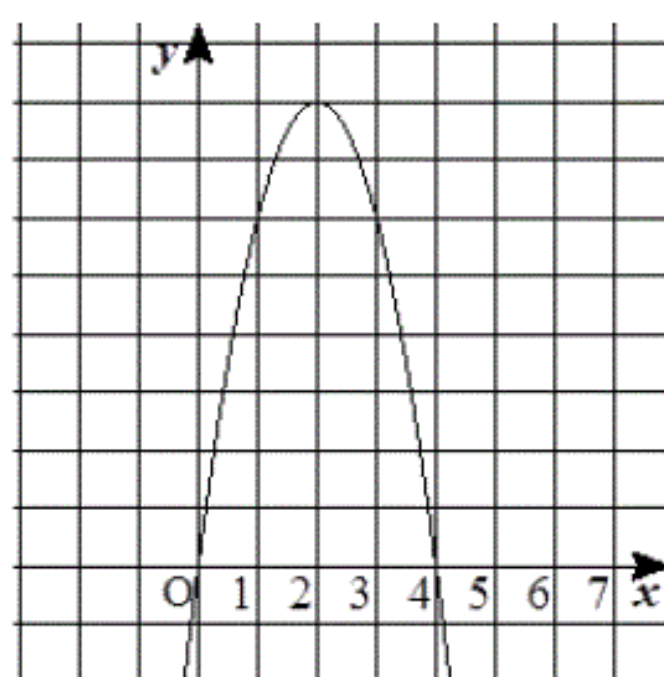


(1)

$n=1$ のとき $y=-x^2+2x$ であるから



上の図より $A_1=4$ である。同様にして $n=2$ のとき $y=-2x^2+8x$ であるから



上の図より $A_2=25$ となる。

(答) $A_1=4, A_2=25$

(2)

$y=-nx^2+2n^2x$ であるから $B_k=-nk^2+2n^2k+1$ である。

(答) $B_k=-nk^2+2n^2k+1$

(3)

$y=-nx^2+2n^2x=-nx(x-2n)$ であるので D_n の変域は $[0, 2n]$ 。よって前問より

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=0}^{2n} B_k \\ &= \sum_{k=0}^{2n} (-nk^2 + 2n^2k + 1) \\ &= -n \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} + 2n^2 \frac{2n(2n+1)}{2} + 2n+1 \\ &= \frac{4}{3}n^4 - \frac{1}{3}n^2 + 2n+1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $A_n = \frac{4}{3}n^4 - \frac{1}{3}n^2 + 2n+1$

(4)

$y=-nx^2+2n^2x=-nx(x-2n)$ であるから、

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{2n} \{-nx(x-2n)\} dx \\ &= \frac{n}{6}(2n)^3 \\ &= \frac{4}{3}n^4 \end{aligned}$$

である。ここで

$$\begin{aligned} S_n - A_n &= \frac{4}{3}n^4 - \left(\frac{4}{3}n^4 - \frac{1}{3}n^2 + 2n+1 \right) \\ &= \frac{1}{3}n^2 - 2n - 1 > 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow n < 3 - 2\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3} < n$$

である。 $n > 0, 6 < 3 + 2\sqrt{3} < 7$ から、求める値は $n=7$ である。

(答) $n=7$