

$$(1) \quad \boxed{\text{ア}} \quad 75 \quad \boxed{\text{イ}} \quad \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \boxed{\text{ウ}} \quad \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$(2) \quad \boxed{\text{エ}} \quad \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \quad \boxed{\text{オ}} \quad 3(2+\sqrt{3}) \quad \boxed{\text{カ}} \quad \frac{3\sqrt{3}}{2}(2+\sqrt{3})$$

〔解説〕

(1) $\triangle AOB$ は二等辺三角形なので、

$$\begin{aligned} \angle OAB &= \frac{1}{2}(180 - \angle AOB) \\ &= \frac{1}{2}\left(180^\circ - \frac{360^\circ}{12}\right) \\ &= 75^\circ \end{aligned}$$

加法定理を用いて、

$$\begin{aligned} \sin \angle OAB &= \sin 75^\circ \\ &= \sin(30^\circ + 45^\circ) \\ &= \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 30^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

同様に加法定理を用いて、

$$\begin{aligned} \cos \angle OAB &= \cos 75^\circ \\ &= \cos(30^\circ + 45^\circ) \\ &= \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1) \end{aligned}$$

(2) O から AB におろした垂線の足を Z とすると、

$$\begin{aligned} \frac{AZ}{OA} &= \cos 75^\circ \\ \frac{1}{2} &= \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1) \\ OA &= \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{2} \end{aligned}$$

また、求める面積 S は、 $\triangle AOB$ の面積を 12 倍したものを考えればよいので、

$$\begin{aligned} S &= 12 \times \left(\frac{1}{2} \times OA \times AB \times \sin 75^\circ \right) \\ &= 12 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3}) \\ &= 3(2 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

同様に T の面積は、

$$\begin{aligned} T &= 6 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{2} \times \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{2} \sin 60^\circ \right) \\ &= 3\sqrt{3} + \frac{9}{2} \end{aligned}$$

(1) C の中心 $(2, 0)$ から l までの距離が 2 未満のとき異なる 2 点で C と l は交わるので

$$l: kx - y + 6k + 14 = 0$$

より

$$\frac{|2k + 6k + 14|}{\sqrt{k^2 + 1}} < 2$$

$$(8k + 14)^2 < 4(k^2 + 1)$$

$$(3k + 4)(5k + 12) < 0$$

$$-\frac{12}{5} < k < -\frac{4}{3}$$

$$(\text{答}) \quad -\frac{12}{5} < k < -\frac{4}{3}$$

(2) M は $(2, 0)$ を通り l に垂直な直線と l の交点だから、

(i) $k=0$ のとき

$$l: y = 14$$

$(2, 0)$ を通り l に垂直な直線は

$$x = 2 \text{ より}$$

$$X = 2$$

(ii) k が 0 でないとき

$$k(x + 6) + 14 = -\frac{1}{k}(x - 2)$$

$$x = \frac{-6k^2 - 14k + 2}{k^2 + 1}$$

$$X = \frac{-6k^2 - 14k + 2}{k^2 + 1}$$

これは $k=0$ でも成立する。また M は l 上の点なので、

$$Y = k(X + 6) + 14$$

$$k = \frac{Y - 14}{X + 6}$$

$$(\text{答}) \quad X = \frac{-6k^2 - 14k + 2}{k^2 + 1}, \quad k = \frac{Y - 14}{X + 6}$$

$$(3) \quad X = \frac{-6k^2 - 14k + 2}{k^2 + 1}$$

に

$$k = \frac{Y - 14}{X + 6}$$

を代入して

$$(k^2 + 1)X = -6k^2 - 14k + 2$$

$$(X + 6)k^2 + 14k + X - 2 = 0$$

$$(X + 6)\left(\frac{Y - 14}{X + 6}\right)^2 + 14\left(\frac{Y - 14}{X + 6}\right) + X - 2 = 0$$

$$X^2 + 4X + Y^2 - 14Y - 12 = 0$$

より求める円の式は、

$$x^2 + 4x + y^2 - 14y - 12 = 0$$

$$(\text{答}) \quad x^2 + 4x + y^2 - 14y - 12 = 0$$

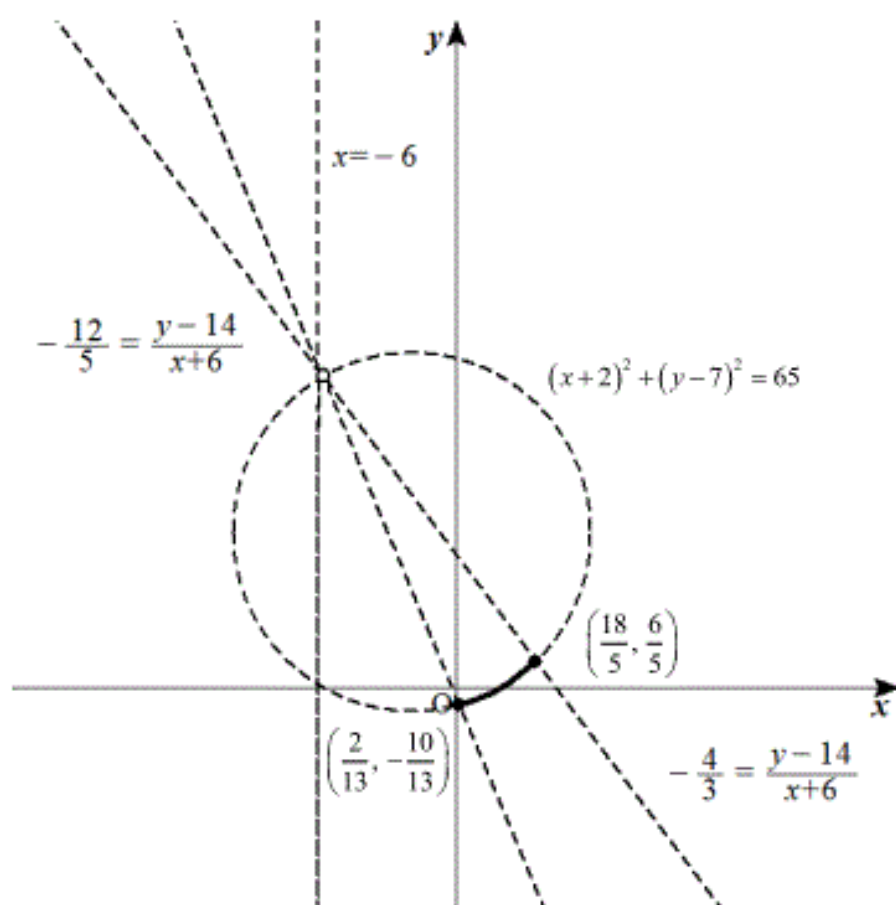
(4) (1)より、

$$-\frac{12}{5} < k < -\frac{4}{3}$$

$$-\frac{12}{5} < \frac{Y - 14}{X + 6} < -\frac{4}{3}$$

であることを踏まえて、図示すると次のようになる。

(答) (図の太線部。端点、境界、白丸は除く。)



(1)

$S=2$ となるのは、はじめ事象 A が連続して 2 回起こるか、事象 B が起こるかである。
したがって、

$$p_2 = \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{9}$$

$S=3$ となるのは、はじめ AAA, BA, AB となるときなので、

$$p_3 = \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{13}{27}$$

$$(\text{答}) \quad p_2 = \frac{7}{9}, \quad p_3 = \frac{13}{27}$$

(2) 問題文より、

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{2}{6} p_{n-1} + \frac{4}{6} p_{n-2} \\ &= \frac{1}{3} p_{n-1} + \frac{2}{3} p_{n-2} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad p_n = \frac{1}{3} p_{n-1} + \frac{2}{3} p_{n-2}$$

(3) (2)より、 $p_{n+1} = \frac{1}{3} p_n + \frac{2}{3} p_{n-1}$ の両辺から p_n をひいて

$$p_{n+1} - p_n = -\frac{2}{3} (p_n - p_{n-1})$$

題意より、

$$a_n = p_{n+1} - p_n$$

を用いて、 $n \geq 2$ のとき、

$$a_n = -\frac{2}{3} a_{n-1}$$

$$a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} a_1$$

$$a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} (p_2 - p_1)$$

$$a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

となる。したがって、

$$p_{n+1} - p_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$p_n = p_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{2}{3}\right)^{k+1}$$

$$p_n = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} \frac{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1 + \frac{2}{3}}$$

$$= \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

となる。これは $n=1$ のときも成り立つ。

$$(\text{答}) \quad p_n = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

(4) $S=3$ とならないとき、必ず $S=4$ となる

$S=4$ となったとき $S=6$ となる確率は p_2 に同じなので

$$\begin{aligned} P &= (1 - p_3) \times p_2 \\ &= \left(1 - \frac{13}{27}\right) \times \frac{7}{9} \\ &= \frac{98}{243} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad P = \frac{98}{243}$$