

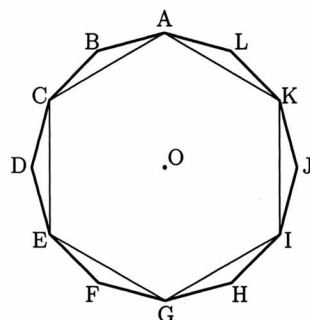
(前期) 平成21年度入学試験 数 学 (問題用紙)

◎ 問題は3問です。解答はすべて解答用紙に記入すること。

- 1 1辺の長さが1の正12角形 ABCDEFGHIJKL の面積を S とし、この正12角形の外接円の中心を O とする。また、正6角形 ACEGIK の面積を T とする。

次の空欄にあてはまる値を、根号は二重根号を用いない形かつ分数は分母を有理化した形で求めよ。

- (1) $\angle OAB = \boxed{\text{ア}}^\circ$, $\sin \angle OAB = \boxed{\text{イ}}$, $\cos \angle OAB = \boxed{\text{ウ}}$
 (2) AO の長さは $\boxed{\text{エ}}$, 面積 $S = \boxed{\text{オ}}$, 面積 $T = \boxed{\text{カ}}$



- 2 座標平面上に

$$\text{円 } C: (x-2)^2 + y^2 = 4 \quad \text{と} \quad \text{直線 } \ell: y = k(x+6) + 14 \quad (k \text{ は実数の定数})$$

があり、 C と ℓ は異なる2点 P, Q で交わっている。線分 PQ の中点を M とし、点 M の座標を (X, Y) とする。

- (1) k がとりうる値の範囲を求めよ。
 (2) X を k の式で表せ。また、直線 ℓ と点 M の関係を利用して、 k を X と Y の式で表せ。
 (3) k が(1)の範囲の値をとって変化するとき、点 M の軌跡は円の一部分になる。この円の方程式を求めよ。
 (4) 点 M の軌跡のグラフを描け。

- 3 サイコロの1または2の目が出る事象を A 、3以上の目が出る事象を B とする。

最初は $S = 0$ とし

操作：偏りのないサイコロを投げて、事象 A が起こると S に1を加え、事象 B が起こると S に2を加えるを繰り返し実施する。このとき、たとえば、事象が $B \rightarrow A \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow \dots$ の順で起これば、 S の値は $0 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow \dots$ と変化し、この場合には $S = 1$ や $S = 5$ は起こらない。

操作を繰り返す途中で $S = n$ が起こる確率を p_n とし、 $S = n$ が起こらない確率を $q_n = 1 - p_n$ とする(ただし、 $n = 1, 2, 3, \dots$)。たとえば、 $S = 1$ が起こるのは操作1回目に事象 A が起こるときだけであるから $p_1 = \frac{1}{3}$ であり、 $S = 1$ が起こらないのは操作1回目に事象 B が起こるときだけであるから $q_1 = \frac{2}{3} = 1 - p_1$ である。

- (1) $S = 2$ が起こる確率 p_2 の値、および、 $S = 3$ が起こる確率 p_3 の値を求めよ。
 (2) $S = n$ が起こる場合として、直前に事象 A が起こって $S = n$ になる場合と、直前に事象 B が起こって $S = n$ になる場合がある。このことより、 p_n と p_{n-1} , p_{n-2} の関係を求めよ。($n = 3, 4, 5, \dots$)
 (3) $a_n = p_{n+1} - p_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) において、 a_n を n の式で表せ。さらに、 p_n を n の式で表せ。
 (4) 途中で $S = 3$ とならないで $S = 6$ となる確率 P の値を求めよ。