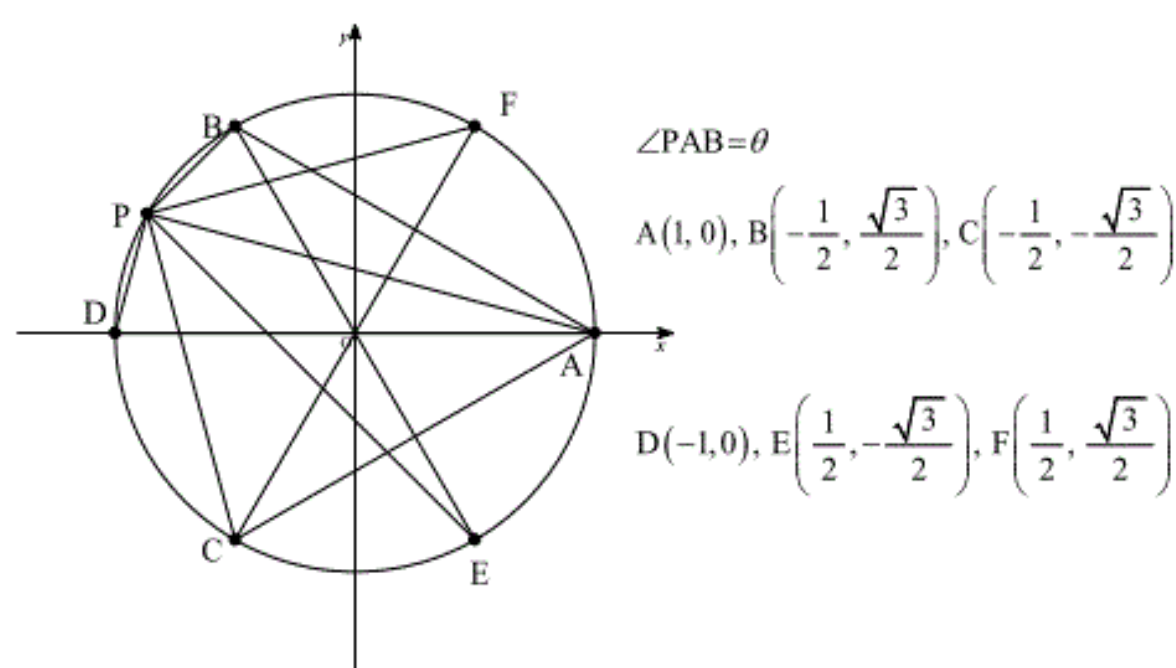


ア	2	イ	$\frac{\pi}{3}$	ウ	2
エ	2	オ	$\frac{\pi}{3}$	カ	4
キ	$\frac{\pi}{3}$	ク	$\frac{\pi}{6}$	ケ	4
コ	6				

【解説】

(1)



三角形 ABC は正三角形である。D(-1,0) とおくと、 $AD=2$ 、 $\angle PAD = \left| \frac{\pi}{6} - \theta \right|$ である。

ここで、AD は円の直径なので、 $\angle APD = \frac{\pi}{2}$ であるから、

$$\begin{aligned}
 PA &= AD \cos \angle PAD \\
 &= 2 \cos \left| \frac{\pi}{6} - \theta \right| \\
 &= 2 \cos \left(\frac{\pi}{6} - \theta \right) \\
 &= 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)
 \end{aligned}$$

となる。また、BE が円の直径となるように点 E をとると、円周角の定理より、 $\angle BEP = \angle BAP = \theta$ となるので、

$$PB = BE \sin \angle BEP = 2 \sin \theta$$

となる。同様に、CF が円の直径となるように点 F をとると、

$$PC = CF \sin \angle CFP = 2 \sin \angle CAP = 2 \sin \left(-\theta + \frac{\pi}{3} \right)$$

となる。

(2)

(1)より、

$$\begin{aligned}
 PA + PB + PC &= 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) + 2 \sin \theta + 2 \sin \left(-\theta + \frac{\pi}{3} \right) \\
 &= \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta + 2 \sin \theta - \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta \\
 &= 2 \sin \theta + 2\sqrt{3} \cos \theta \\
 &= 4 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)
 \end{aligned}$$

となる。 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ であるから、これは $\theta = \frac{\pi}{6}$ のときに最大値 4 をとる。

(3)

(1)より、

$$\begin{aligned}
 PA^2 + PB^2 + PC^2 &= \left(\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta \right)^2 + (2 \sin \theta)^2 + \left(-\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta \right)^2 \\
 &= 2(\sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta) + 4 \sin^2 \theta \\
 &= 6(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

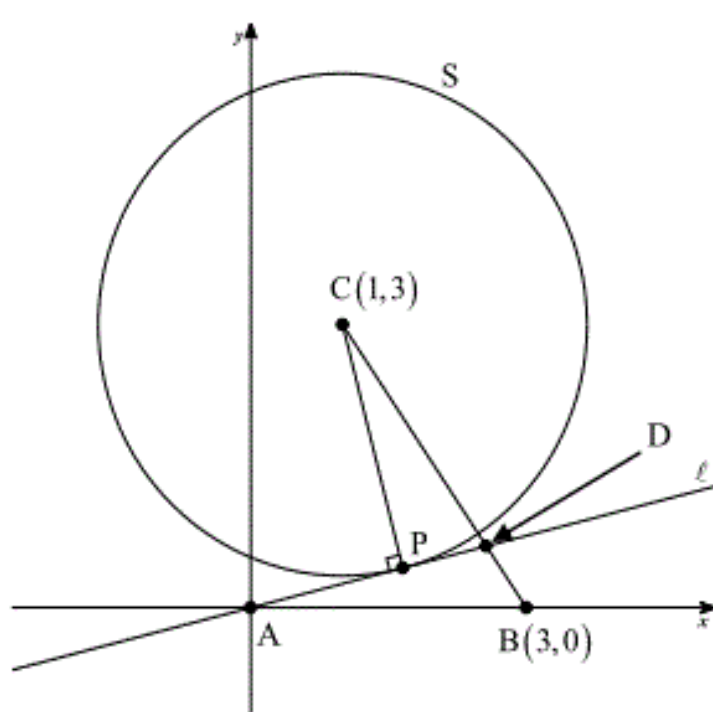
となる。

2

- (1) 点Dの座標: $\left(\frac{3k+1}{k+1}, \frac{3}{k+1}\right)$ 直線 ℓ の方程式: $y = \frac{3}{3k+1}x$
- 円Sの半径 r の値: $\frac{9k}{\sqrt{9k^2+6k+10}}$ (2) r の値の範囲: $0 < r < 3$
- (3) 軌跡の方程式: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$ 軌跡の範囲: $x > 1$ の部分
- (4) k の値: $\frac{7}{6}$ 点Pの座標: $\left(\frac{27}{13}, \frac{18}{13}\right)$

【解説】

(1)



内分の公式から、

$$D\left(\frac{k \cdot 3 + 1 \cdot 1}{k+1}, \frac{k \cdot 0 + 1 \cdot 3}{k+1}\right) = \left(\frac{3k+1}{k+1}, \frac{3}{k+1}\right)$$

となる。直線 ℓ は2点A, Dを通るので、傾きは $\frac{3}{3k+1}$ である。

よって、直線 ℓ の方程式は $y = \frac{3}{3k+1}x$ である。

円Sの半径 r は、直線 ℓ と点Cとの距離に等しいから、

$\ell: 3x - (3k+1)y = 0$ と変形して、点と直線の距離の公式を用いると

$$\begin{aligned} r &= \frac{|3 \cdot 1 - (3k+1) \cdot 3|}{\sqrt{3^2 + (3k+1)^2}} \\ &= \frac{9k}{\sqrt{9k^2 + 6k + 10}} \quad (\because k > 0) \end{aligned}$$

となる。

(2)

$$r = \frac{9}{\sqrt{9 + \frac{6}{k} + \frac{10}{k^2}}}$$

と変形できるから、分母のとりうる値を調べればよい。 $t = \frac{1}{k}$ とおくと、 $t > 0$ であり、

$$\begin{aligned} 9 + \frac{6}{k} + \frac{10}{k^2} &= 10t^2 + 6t + 9 \\ &= 10\left(t + \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{81}{10} \end{aligned}$$

となる。これを $f(t)$ とおき、 t の2次関数とみれば、軸の方程式は $t = -\frac{3}{10}$ であるから、

$t > 0$ において $f(t)$ のとりうる値は $f(t) > f(0) = 9$ となる。

したがって、半径 r のとりうる値は

$$0 < r < \frac{9}{\sqrt{9}} = 3$$

である。

(3)

円Sは直線 ℓ に接するので、 k の値によらず常に $\angle APC = 90^\circ$ が成り立つ。

よって、点Pは線分ACを直径とする円上を動くことが分かる。

これより、求める軌跡の方程式は

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

である。

また、点Pの動く範囲は(1, 0)と(1, 3)を結ぶ弧のうち、Aを通らない方、

つまり $x > 1$ の部分である。

(4)

直線BCと直線 ℓ が直交する場合を考えればよい。

直線BCの方程式は $y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$ であるから、

$$\begin{aligned} \frac{3}{3k+1} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) &= -1 \\ \Leftrightarrow 6k + 2 &= 9 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{7}{6} \end{aligned}$$

となる。このとき、 $\ell: y = \frac{2}{3}x$ であり、点Pは直線BCと直線 ℓ の交点であるから、

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2} &= \frac{2}{3}x \\ \therefore x &= \frac{27}{13} \end{aligned}$$

このとき、 $y = \frac{2}{3} \cdot \frac{27}{13} = \frac{18}{13}$ であるから $P\left(\frac{27}{13}, \frac{18}{13}\right)$ となる。

(1)

問題の条件②, ③より, x_1 は関係式 $\frac{1}{x_1} = 1 + \frac{x_1}{2}$ を満たす。分母を払って整理すると,

$$\begin{aligned} x_1^2 + 2x_1 - 2 &= 0 \\ \therefore x_1 &= -1 + \sqrt{3} \quad (\because 0 < x_1 < 1) \end{aligned}$$

を得る。

また, 自然数 n について, x_n は関係式 $\frac{1}{x_n} = n + \frac{x_n}{2}$ を満たす。分母を払って整理すると,

$$\begin{aligned} x_n^2 + 2nx_n - 2 &= 0 \\ \therefore x_n &= -n \pm \sqrt{n^2 + 2} \end{aligned}$$

となる。ここで, $x_n = -n - \sqrt{n^2 + 2}$ は負であり, 条件①を満たさず不適である。一方,

$$\begin{aligned} -n + \sqrt{n^2 + 2} &> 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{n^2 + 2} &> n \\ \Leftrightarrow n^2 + 2 &> n^2 \quad (\because n > 0) \end{aligned}$$

となり, 最後の式が成り立っているので, $x_n = -n + \sqrt{n^2 + 2} > 0$ も成り立つ。さらに,

$$\begin{aligned} -n + \sqrt{n^2 + 2} &< 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{n^2 + 2} &< n + 1 \\ \Leftrightarrow n^2 + 2 &< (n + 1)^2 \quad (\because n > 0) \\ \Leftrightarrow 1 &< 2n \end{aligned}$$

となり, $n \geq 1$ であるから最後の式が成り立っているので, $x_n = -n + \sqrt{n^2 + 2} < 1$ も成り立つ。

以上より, $x_n = -n + \sqrt{n^2 + 2}$ である。

$$\text{(答)} \quad x_1 = -1 + \sqrt{3}, \quad x_n = -n + \sqrt{n^2 + 2}$$

(2)

$$\begin{aligned} x_n &= \sqrt{n^2 + 2} - n \\ &= \frac{(\sqrt{n^2 + 2} - n)(\sqrt{n^2 + 2} + n)}{\sqrt{n^2 + 2} + n} \\ &= \frac{2}{\sqrt{n^2 + 2} + n} \\ &< \frac{2}{n + n} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

となるので, $x_n < \frac{1}{n}$ が成り立つことが示された。

(証明終)

(3)

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n x_k \\ &< \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \left(\because x_k < \frac{1}{k} \right) \\ &\leq 1 + \log_2 n \end{aligned}$$

となるので, 題意は示された。ここで最後の不等号で(*)を用いた。

(証明終)

(4)

(i)

二項定理より,

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n {}_nC_k \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &\geq {}_nC_0 + {}_nC_1 \frac{1}{n} \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

であることが示された。

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$ の両辺に対して, 2 を底とする対数をとると, 底 $2 > 1$ であることから,

$$\begin{aligned} n \log_2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) &\geq \log_2 2 = 1 \\ \therefore \log_2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) &\geq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

となるので, 題意は示された。

(証明終)

(ii)

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leq 1 + \log_2 n \quad \cdots \text{(a)}$$

(a)が任意の自然数 n に対して成り立つことを, 数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{1} = 1, (\text{右辺}) = 1 + \log_2 1 = 1 \quad \text{となるので, (a)は成り立つ。}$$

[2] $n=k$ のとき(a)が成り立つと仮定し, $n=k+1$ のとき

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i} = \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \right) + \frac{1}{k+1}$$

ここで, 仮定より $\sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \leq 1 + \log_2 k$ が成り立つことを用いると

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i} &\leq (1 + \log_2 k) + \frac{1}{k+1} \\ &< 1 + \log_2 k + \frac{1}{k} \\ &\leq 1 + \log_2 k + \log_2 \left(1 + \frac{1}{k}\right) \quad (\because \text{(i)}) \\ &= 1 + \log_2 (k+1) \end{aligned}$$

となり, $n=k+1$ のときも(a)は成り立つ。

以上, [1][2]より(*)が成り立つことが示された。

(証明終)