

(前期) 平成22年度入学試験 数 学 (問題用紙)

◎ 問題は3問です。解答はすべて解答用紙に記入すること。

- 1 座標平面に、原点を中心とし半径が1の円があり、その円周上に3点

$$A(1, 0), \quad B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

をとる。円周上の弧BC(点Aを含まないほうの弧BC)を考え、弧BC上を点Bから点Cまで動く点をPとする。

$\angle PAB = \theta$ とし、点Pと3点A, B, Cを結ぶ3つの線分の長さを、それぞれ、PA, PB, PC とするとき

- (1) PA, PB, PC は

$$PA = \boxed{\text{ア}} \sin\left(\theta + \boxed{\text{イ}}\right), \quad PB = \boxed{\text{ウ}} \sin \theta, \quad PC = \boxed{\text{エ}} \sin\left(-\theta + \boxed{\text{オ}}\right)$$

と表すことができる。

- (2) $PA + PB + PC = \boxed{\text{カ}} \sin\left(\theta + \boxed{\text{キ}}\right)$ と表すことができる。

$PA + PB + PC$ の値は $\theta = \boxed{\text{ク}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{ケ}}$ になる。

- (3) $PA^2 + PB^2 + PC^2 = \boxed{\text{コ}}$ である。

- 2 座標平面の3点 $A(0,0)$, $B(3,0)$, $C(1,3)$ に対して

- 線分BCを1: k に内分する点をD (k は正の実数)
- 2点A, Dを通る直線を ℓ
- 点Cを中心とし直線 ℓ に接する円をS
- 円Sと直線 ℓ の接点をP

とする。

- (1) 点Dの座標、直線 ℓ の方程式、円Sの半径 r の値を、それぞれ、 k を用いて表せ。
(2) k がすべての正の値をとって変化するとき、円Sの半径 r がとりうる値の範囲を求めよ。
(3) k がすべての正の値をとって変化するとき、点Pが描く軌跡の方程式とその範囲を求めよ。
(4) 点Pが線分BC上にあるとき、 k の値と点Pの座標を求めよ。

- 3 3つの条件

$$\textcircled{1} \quad 0 < x < 1 \quad \textcircled{2} \quad \frac{1}{x} \text{ の小数部分が } \frac{x}{2} \text{ に等しい} \quad \textcircled{3} \quad \frac{1}{x} \text{ の整数部分が } n \quad (n \text{ は自然数})$$

をみたす実数 x を x_n として、数列 $\{x_n\}$ を作るとき

- (1) 初項 x_1 を求めよ。また、一般項 x_n を求めよ。
(2) $x_n < \frac{1}{n}$ がなりたつことを示せ。
(3) 数列 $\{x_n\}$ の第1項から第 n 項までの和 S_n に対して $S_n < 1 + \log_2 n$ がなりたつことを示せ。

ただし、 $\boxed{\text{任意の自然数 } n \text{ に対して } \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq 1 + \log_2 n \text{ がなりたつ}} \cdots \cdots (*)$
を利用せよ。

- (4) $(*)$ を、以下のようにして証明せよ。 $(n$ は自然数)

(i) 二項定理を利用して $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$ を示し、 $\log_2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{n}$ を示せ。

(ii) $(*)$ がなりたつことを、数学的帰納法を用いて示せ。