

1

(1)	ア	r	イ	$3r$	ウ	$\frac{a^2+3r^3}{2a}$
	エ	$\sqrt{3}r$	オ	r		
	カ	$\frac{7}{6}$	キ	$\sqrt{3}$		
(2)	ク	$6r$	ケ	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	コ	$\frac{3\sqrt{2}}{2}r$

[解説]

- (1)
i)

半径の差<中心間の距離<半径の和となれば二つの円は2点で交わるので

$$2r-r < a < 2r+r$$

$$\Leftrightarrow r < a < 3r$$

となる。このとき O_1 と O_2 の交点を求めると

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4r^2 \\ (x-a)^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-a)^2 + 4r^2 - x^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow 2ax = a^2 + 3r^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a^2 + 3r^2}{2a} (\because a > 0)$$

となる。これが P の x 座標である。

ii)

$y^2 = 4r^2 - x^2$ より $x = \frac{a^2 + 3r^2}{2a} (> 0)$ が最小となる点を考えればよい。ここで

$$x = \frac{a^2 + 3r^2}{2a}$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{3r^2}{2a}$$

であり、また、 $a > 0$ なので、相加相乗平均の公式を用いると

$$x \geq 2\sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{3r^2}{2a}} = \sqrt{3}r (\because r > 0)$$

となる。等号成立は

$$\frac{a}{2} = \frac{3r^2}{2a}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 3r^2$$

$$\Leftrightarrow a = \sqrt{3}r (\because a, r > 0)$$

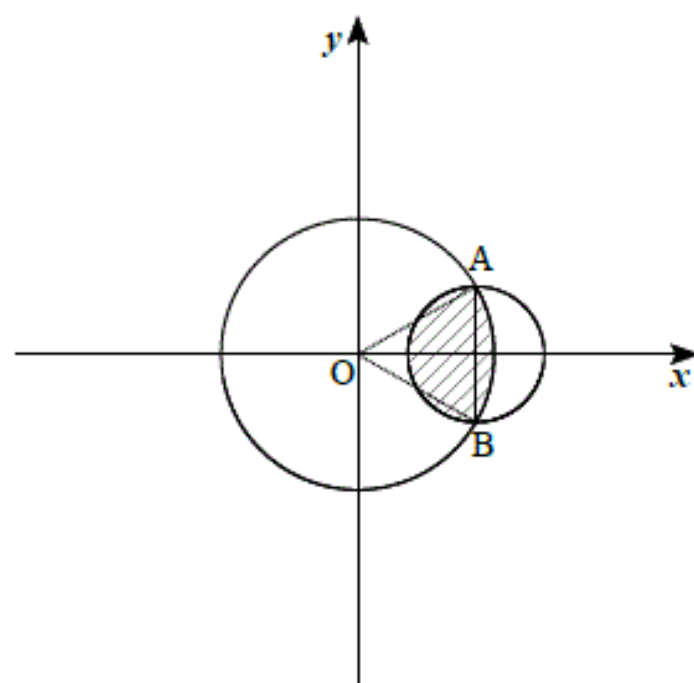
となる。このとき P の y 座標は最大値

$$y = \sqrt{4r^2 - x^2}$$

$$= \sqrt{4r^2 - 3r^2}$$

$$= r$$

をとる。このとき二つの円の共通部分は以下の図の斜線部となる。



図のように記号を置くと、 $OA = AB = OB = 2r$ となり $\triangle OAB$ は正三角形となるので $\angle AOB$ は 60° となる。以上からこの斜線部の面積は

$$(\text{半円の面積}) + (\text{扇形 OAB の面積}) - (\triangle OAB \text{ の面積})$$

$$= \frac{\pi r^2}{2} + \frac{2}{3}\pi r^2 - \sqrt{3}r^2$$

$$= \left(\frac{7}{6}\pi - \sqrt{3}\right)r^2$$

となる。

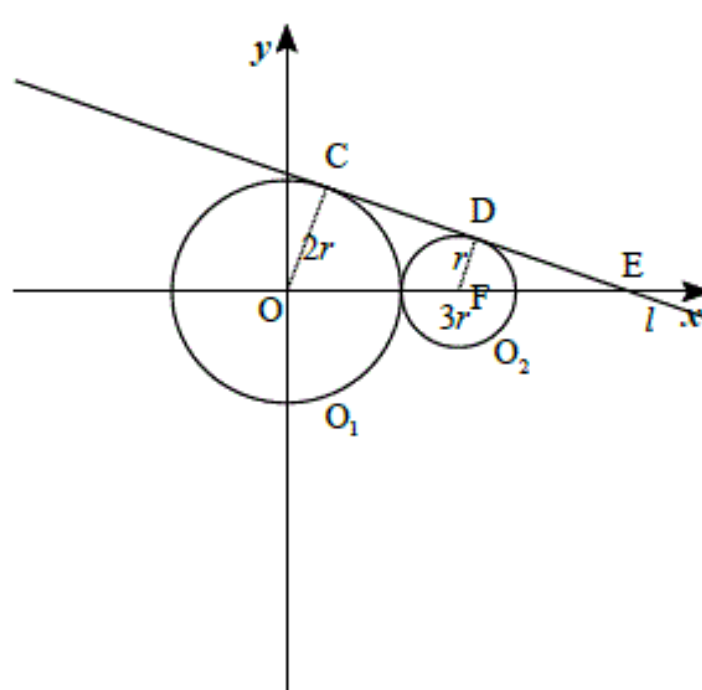
(2)

二つの円が外接するためには半径の和が中心間の距離の絶対値となればよいので

$$3r = |a|$$

$$\Leftrightarrow a = 3r (\because a, r > 0)$$

となる。このとき、二つの円は以下の図のような位置にある。



ここで上図のように記号を置くと、中点連結定理から $OF = FE$ となるので E の x 座標は $6r$ となる。このとき $\triangle OCE$ において三平方の定理から CE の長さは

$$\sqrt{(6r)^2 - (2r)^2} = 4\sqrt{2}r$$

となる。したがって l の傾きは

$$-\frac{2r}{4\sqrt{2}r} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

となるので l の方程式は

$$y = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(x - 6r)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{3\sqrt{2}}{2}r$$

となる。

2

$$(1) \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{a} + \frac{5}{6}\overrightarrow{b} + \frac{1}{6}\overrightarrow{c}, \quad \overrightarrow{MG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{a} - \frac{1}{2}\overrightarrow{b} + \frac{1}{6}\overrightarrow{c}$$

$$s \text{ の値} = \frac{3}{2}$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{12}\overrightarrow{b} + \frac{5}{12}\overrightarrow{c}$$

$$(2) \quad \overrightarrow{LD} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - t\overrightarrow{c}, \quad \overrightarrow{LG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \left(\frac{1}{3} - t\right)\overrightarrow{c}$$

$$t \text{ の値} = \frac{1}{2}$$

[解説]

(1)

i)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \frac{5}{6}\overrightarrow{OD} + \frac{1}{6}\overrightarrow{OP} \\ &= \frac{5}{6}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{6}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}) \\ &= \frac{5}{6}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \frac{1}{6}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}) \\ &= \overrightarrow{a} + \frac{5}{6}\overrightarrow{b} + \frac{1}{6}\overrightarrow{c} \end{aligned}$$

となる。また

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$$

から

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MG} &= \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OM} \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) - \left(\overrightarrow{a} + \frac{5}{6}\overrightarrow{b} + \frac{1}{6}\overrightarrow{c}\right) \\ &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{a} - \frac{1}{2}\overrightarrow{b} + \frac{1}{6}\overrightarrow{c} \end{aligned}$$

となる。

ii)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= s\overrightarrow{MG} \\ &= -\frac{2}{3}s\overrightarrow{a} - \frac{1}{2}s\overrightarrow{b} + \frac{1}{6}s\overrightarrow{c} \end{aligned}$$

から

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ON} &= \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN} \\ &= \left(1 - \frac{2}{3}s\right)\overrightarrow{a} + \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}s\right)\overrightarrow{b} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}s\right)\overrightarrow{c} \end{aligned}$$

となる。点 N は面 OBRC 上にあるので、 $\overrightarrow{a}$ の係数は 0 となる。したがって、

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2}{3}s &= 0 \\ \Leftrightarrow s &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

となる。

iii)

$$\overrightarrow{ON} = \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}s\right)\overrightarrow{b} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}s\right)\overrightarrow{c} \text{ に } s = \frac{3}{2} \text{ を代入すると}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ON} &= \left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}\right)\overrightarrow{b} + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right)\overrightarrow{c} \\ &= \frac{1}{12}\overrightarrow{b} + \frac{5}{12}\overrightarrow{c} \end{aligned}$$

となる。

(2)

i)

$$\overrightarrow{OL} = t\overrightarrow{c}$$

から

$$\begin{aligned} \overrightarrow{LD} &= \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OL} \\ &= \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - t\overrightarrow{c}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{LG} &= \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OL} \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) - t\overrightarrow{c} \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \left(\frac{1}{3} - t\right)\overrightarrow{c} \end{aligned}$$

となる。

ii)

ある実数 k を用いて $\overrightarrow{LG} = k\overrightarrow{LD}$ と表せられれば L, G, D は一直線上となる。ここで

$$\begin{aligned} \overrightarrow{LG} &= k\overrightarrow{LD} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3}(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \left(\frac{1}{3} - t\right)\overrightarrow{c} &= k\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b} - kt\overrightarrow{c} \end{aligned}$$

であり、 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ は一次独立なので

$$\begin{aligned} \begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ -kt = \frac{1}{3} - t \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。つまり $t = \frac{1}{2}$ である。

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 2a \\ &= \{x - (a+1)\}(x - 2a) \end{aligned}$$

より、 $f(x)=0$ を満たす x の値は、

$$x = a+1, 2a$$

である。

(答) $x = a+1, 2a$

(2)

$f(x)$ が下に凸な2次関数であることに注意すれば、

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & x < \alpha, \beta \leq x \text{ のとき} \\ -f(x) & \alpha \leq x < \beta \text{ のとき} \end{cases}$$

となるから、

$$\begin{aligned} \int_0^4 |f(x)| dx &= \int_0^\alpha f(x) dx + \int_\alpha^\beta \{-f(x)\} dx + \int_\beta^4 f(x) dx \\ &= F(\alpha) - F(0) - F(\beta) + F(\alpha) + F(4) - F(\beta) \quad \dots \textcircled{1} \\ &= F(4) - F(0) + 2\{F(\alpha) - F(\beta)\} \end{aligned}$$

となる。また、

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$$

と書けることから、

$$\begin{aligned} F(4) - F(0) + 2\{F(\alpha) - F(\beta)\} &= F(4) - F(0) + 2 \int_\alpha^\beta -(x - \alpha)(x - \beta) dx \\ &= F(4) - F(0) + 2 \cdot \frac{(\beta - \alpha)^3}{6} \\ &= F(4) - F(0) + \frac{(\beta - \alpha)^3}{3} \end{aligned}$$

となる。以上から題意は示せた。

(証明終)

(3)

$$\begin{aligned} F(4) - F(0) &= \int_0^4 \{x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 2a\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(3a+1)x^2 + (2a^2 + 2a)x \right]_0^4 \\ &= \frac{64}{3} - 8(3a+1) + 4(2a^2 + 2a) \\ &= 8a^2 - 16a + \frac{40}{3} \end{aligned}$$

となる。また(1)の結果から $f(x)=0$ は $x=a+1, 2a$ を解に持つ。

[1] $0 < a < 1$ のとき

$a+1 > 2a$ より $\alpha = 2a, \beta = a+1$ となるので

$$\begin{aligned} S(a) &= F(4) - F(0) + \frac{(\beta - \alpha)^3}{3} \\ &= 8a^2 - 16a + \frac{40}{3} + \frac{(a+1-2a)^3}{3} \\ &= -\frac{1}{3}a^3 + 9a^2 - 17a + \frac{41}{3} \end{aligned}$$

となる。

[2] $1 < a < 2$ のとき

$a+1 < 2a$ より $\alpha = a+1, \beta = 2a$ なので

$$\begin{aligned} S(a) &= F(4) - F(0) + \frac{(\beta - \alpha)^3}{3} \\ &= 8a^2 - 16a + \frac{40}{3} + \frac{\{2a - (a+1)\}^3}{3} \\ &= \frac{1}{3}a^3 + 7a^2 - 15a + 13 \end{aligned}$$

(答)

$$0 < a < 1 \text{ のとき} \quad S(a) = -\frac{1}{3}a^3 + 9a^2 - 17a + \frac{41}{3}$$

$$1 < a < 2 \text{ のとき} \quad S(a) = \frac{1}{3}a^3 + 7a^2 - 15a + 13$$

(4)

[1] $0 < a < 1$ のとき

$$S(a) = -\frac{1}{3}a^3 + 9a^2 - 17a + \frac{41}{3}$$

$$\begin{aligned} S'(a) &= -a^2 + 18a - 17 \\ &= -(a-17)(a-1) \end{aligned}$$

となる。 $0 < a < 1$ から $S'(a) < 0$ となるので $S(a)$ は単調減少となる。

[2] $1 < a < 2$ のとき

$$S(a) = \frac{1}{3}a^3 + 7a^2 - 15a + 13$$

$$\begin{aligned} S'(a) &= a^2 + 14a - 15 \\ &= (a+15)(a-1) \end{aligned}$$

となる。 $1 < a < 2$ から $S'(a) > 0$ となるので $S(a)$ は単調増加となる。

以上、[1]、[2]より、 $S(a)$ が $0 < a < 1$ で単調減少、 $1 < a < 2$ で単調増加することが示された。

(証明終)

また、①式が、 $\alpha=0$ や $\beta=4$ 、 $\alpha=\beta$ のときでも成り立つことから、 $S(a)$ は $a=0, 1, 2$ においても連続であり、したがって、以下のような増減表がかけらる。

a	0	...	1	...	2
$S'(a)$		-	0	+	
$S(a)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$	

よって、 $S(a)$ は、 $a=1$ で最小値

$$\begin{aligned} S(1) &= -\frac{1}{3} + 9 - 17 + \frac{41}{3} \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

をとる。

(答) $a=1$ 、最小値 $\frac{16}{3}$