

1

- (1) ア $\frac{45}{2}$
- (2) イ $\frac{5}{2}$
- ウ $\frac{9}{2}$
- (3) エ, オ $\frac{5}{2}, \frac{7}{2}$
- カ -2
- キ, ク $\frac{3}{2}, \frac{9}{2}$

【解説】

(1)

実数 a を用いて,

$$\int_0^3 f(x) dx = a$$

とすると,

$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 (2x^2 - 14x + a) dx$$

$$\Leftrightarrow a = \left[\frac{2}{3}x^3 - 7x^2 + ax \right]_0^3$$

$$\Leftrightarrow a = 18 - 63 + 3a$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{45}{2}$$

であるので,

$$\int_0^3 f(x) dx = \frac{45}{2}$$

となる。

(2)

(1)より,

$$f(x) = 2x^2 - 14x + \frac{45}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-9)(2x-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{2}, \frac{9}{2}$$

となるので,

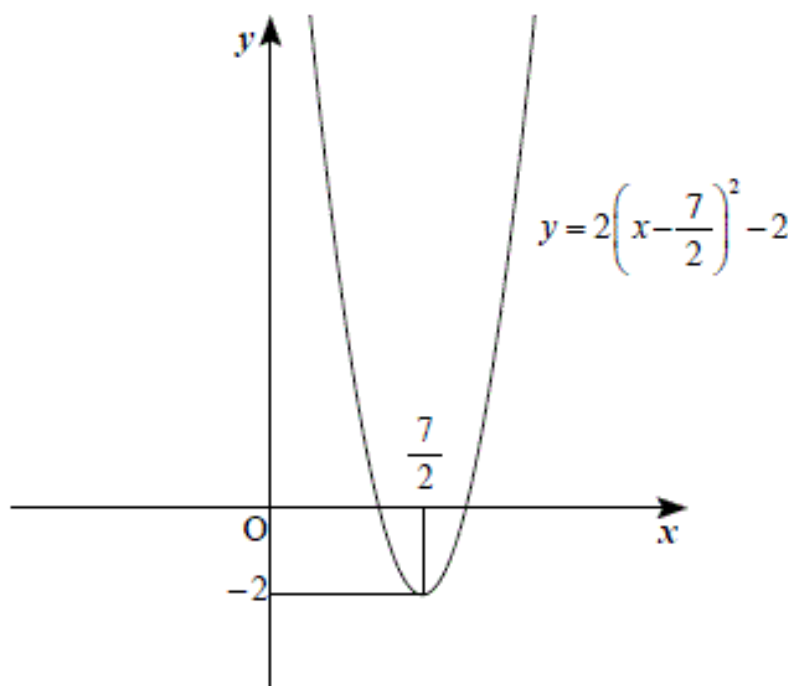
$$x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = \frac{9}{2}$$

である。

(3)

$$f(x) = 2\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - 2$$

となるので, グラフは下図のようになる。



$m(a)$ が一定値になるときは,

$$\begin{cases} a+1 \geq \frac{7}{2} \\ a \leq \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2} \leq a \leq \frac{7}{2}$$

であり, この区間で,

$$m(a) = -2$$

である。また,

$$f(x) \leq 6$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 14x + \frac{33}{2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-11)(2x-3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{11}{2}$$

であるので, $M(a) \leq 6$ をみたす a の区間は,

$$\begin{cases} a \geq \frac{3}{2} \\ a+1 \leq \frac{11}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq a \leq \frac{9}{2}$$

である。

2

(1)

△ABCに余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned}BC^2 &= 16 + 16 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 30^\circ \\ \Leftrightarrow BC^2 &= 16(2 - \sqrt{3}) \\ \Leftrightarrow BC^2 &= 8(4 - 2\sqrt{3}) \\ \Leftrightarrow BC^2 &= 8(\sqrt{3} - 1)^2 \\ \Leftrightarrow BC &= 2(\sqrt{6} - \sqrt{2})\end{aligned}$$

となる。また、△BP₁Q₁において、∠A = 30°なので、∠ABP₁ = ∠AP₁B = 75°であり、
∠P₂P₁Q₁ = 60°より、

$$\begin{aligned}\angle BP_1Q_1 &= 15^\circ \\ \Leftrightarrow \angle BQ_1P_1 &= 90^\circ\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{1}}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}P_1P_2 &= P_1Q_1 \\ &= BC \times \cos 15^\circ \\ &= 2(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \\ &= 2\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad BC = 2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$$

$$P_1P_2 = 2$$

(2)

(1)より、△P₁Q₁P₂の一边の長さは2であるので、

$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}\angle P_2Q_1Q_2 &= 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ \\ &= 30^\circ \\ \angle Q_1P_2Q_2 &= 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ \\ &= 60^\circ\end{aligned}$$

となるので、

$$\angle Q_1Q_2P_2 = 90^\circ$$

である。よって、Q₁P₂ = 2であるので、

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad S_1 = \sqrt{3}$$

$$I_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(3)

S₁, S₂, S₃…S_nとI₁, I₂, I₃, …I_nはそれぞれの間で相似であるので、

$$Q_{n-1}P_n : P_nQ_n = 2 : 1$$

となり、S_nの一边は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \quad (n=1, 2, \dots)$$

である。よって、

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{2} \times \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right\}^2 \times \sin 60^\circ \\ &= \sqrt{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}\end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}S_n &< \frac{1}{1000} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2} &< \frac{1}{\sqrt{3} \times 1000} \\ \Leftrightarrow 2^{2n-2} &> 1.73 \dots \times 10^3\end{aligned}$$

であるので、求める最小のnは、

$$n = 7$$

である。

$$\text{(答)} \quad S_n = \sqrt{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}$$

$$n = 7$$

(4)

(2)より、I_nにおいて、

$$\begin{cases} Q_nQ_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ P_{n+1}Q_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \times \frac{1}{2} \end{cases}$$

となるので、

$$\begin{aligned}I_n &= \frac{1}{2} \cdot Q_nQ_{n+1} \cdot P_{n+1}Q_{n+1} \\ &= \sqrt{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^5 I_n &= 2\sqrt{3} \cdot \sum_{n=1}^5 \frac{1}{4^n} \\ &= 2\sqrt{3} \cdot \frac{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4^5}\right)}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{341\sqrt{3}}{512}\end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad I_n = \sqrt{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$$

$$\sum_{n=1}^5 I_n = \frac{341\sqrt{3}}{512}$$

3

(1)

$$\begin{aligned}f(x) &= 25^x + \frac{1}{25^x} + 2p \left(5^x + \frac{1}{5^x} - 1 \right) + 7 \\&= \left(5^x + \frac{1}{5^x} \right)^2 + 2p \left(5^x + \frac{1}{5^x} - 1 \right) + 5\end{aligned}$$

となるので、

$$g(t) = t^2 + 2p(t-1) + 5$$

となる。

(答) $g(t) = t^2 + 2p(t-1) + 5$

(2)

$g(t) = 0$ の判別式を D とする。 $g(t)$ は t の 2 次方程式なので、 $g(t) = 0$ が実数解を 1 個もつとき $D = 0$ となる。よって、

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow p^2 - (5-2p) &= 0 \\ \Leftrightarrow p &= -1 \pm \sqrt{6}\end{aligned}$$

となり、このとき、

$$\begin{aligned}g(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 + 2pt + p^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= -p = 1 \mp \sqrt{6}\end{aligned}$$

となる。

(答) $(p, t) = (-1 + \sqrt{6}, 1 - \sqrt{6}), (-1 - \sqrt{6}, 1 + \sqrt{6})$

(3)

$$g(t) = (t+p)^2 - p^2 - 2p + 5$$

である。

a)

まず、 $g(t) = 0$ が 2 個の実数解をもつには、

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= p^2 - (5-2p) > 0 \\ \Leftrightarrow -1 - \sqrt{6} > p, p > -1 + \sqrt{6} &\cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

であり、 $t_1 < 2, t_2 > 2$ を満たすには、

$$\begin{aligned}g(2) &< 0 \\ \Leftrightarrow 2p + 9 &< 0 \\ \Leftrightarrow p &< -\frac{9}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}\end{aligned}$$

となるので、求める範囲は①かつ②である。よって、

$$p < -\frac{9}{2}$$

となる。

(答) $p < -\frac{9}{2}$

b)

まず、①が成り立つ。また、

$$\begin{aligned}t_1 &= 2 \\ g(2) &= 0 \\ \Leftrightarrow p &= -\frac{9}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}\end{aligned}$$

となり、このとき曲線 $y = g(t)$ の軸の t 座標は、

$$\frac{9}{2} > 2$$

であるので、 $t_2 > 2$ は成り立つ。よって、求める範囲は①かつ③より、

$$p = -\frac{9}{2}$$

となる。

(答) $p = -\frac{9}{2}$

c)

まず、①が成り立つ。また、曲線 $y = g(t)$ の軸の t 座標が 2 より大きくなければならぬので、

$$\begin{aligned}-p &> 2 \\ \Leftrightarrow p &< -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}\end{aligned}$$

となる。次に、

$$\begin{aligned}g(2) &> 0 \\ \Leftrightarrow p &> -\frac{9}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{5}\end{aligned}$$

となるので、求める範囲は①かつ④かつ⑤より、

$$-\frac{9}{2} < p < -1 - \sqrt{6}$$

となる。

(答) $-\frac{9}{2} < p < -1 - \sqrt{6}$

d)

まず、①と⑤が成り立たなければならぬ。また、曲線 $y = g(t)$ の軸の t 座標が 2 より小さくなければならぬので、

$$\begin{aligned}-p &< 2 \\ \Leftrightarrow p &> -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{6}\end{aligned}$$

となるので、求める範囲は、①かつ⑤かつ⑥より、

$$-1 + \sqrt{6} < p$$

となる。

(答) $-1 + \sqrt{6} < p$

(4)

まず、

$$\begin{aligned}t &= 5^x + \frac{1}{5^x} \\ \Leftrightarrow 5^{2x} - t5^x + 1 &= 0\end{aligned}$$

となるので、 $5^x = A$ とすると、

$$A^2 - tA + 1 = 0$$

となるので、この判別式を D' とし、左辺を $h(A)$ とする。ここで、 x が異なる 2 つの実数解をもつには、 A が正の範囲で異なる 2 解をもてばよいので、

$$\begin{cases} h(0) = 1 > 0 \\ D' = t^2 - 4 > 0 \\ \text{曲線 } y = h(A) \text{ の軸の } A \text{ 座標: } \frac{t}{2} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t > 2$$

となる。

(答) $t > 2$

(5)

$g(t) = 0$ に関して、

[1] $-1 - \sqrt{6} < p < -1 + \sqrt{6}$ のとき

$g(t) = 0$ は解をもたないので、実数解 x の個数は 0 個である。

[2] $p = -1 + \sqrt{6}$ のとき

$g(t) = 0$ の解は $t = 1 - \sqrt{6}$ であるので、(4)より実数解 x の個数は、0 個である。

[3] $p = -1 - \sqrt{6}$ のとき

$g(t) = 0$ の解は $t = 1 + \sqrt{6}$ であるので、(4)より実数解 x の個数は、2 個である。

[4] $-1 - \sqrt{6} > p, p > -1 + \sqrt{6}$ のとき

(3)の条件が適用できるので、(3)と同じく場合分けする。

a) のとき、すなわち $p < -\frac{9}{2}$ のとき

(4)より実数解 x の個数は、 $t_1 < 2$ に対して 0 個、 $t_2 > 2$ に対して 2 個あるので、合計 2 個である。

b) のとき、すなわち $p = -\frac{9}{2}$ のとき

(4)より実数解 x の個数は、 $t_1 = 2$ に対して 1 個、 $t_2 > 2$ に対して 2 個あるので、合計 3 個である。

c) のとき、すなわち $-\frac{9}{2} < p < -1 - \sqrt{6}$ のとき

(4)より実数解 x の個数は、 $t_1, t_2 > 2$ に対してそれぞれ 2 個あるので、合計 4 個である。

d) のとき、すなわち $-1 + \sqrt{6} < p$ のとき

(4)より実数解 x の個数は、 $t_1 < t_2 < 2$ に対してそれぞれ 0 個あるので、合計 0 個である。

(答) $p < -\frac{9}{2}$ のとき 2 個

$p = -\frac{9}{2}$ のとき 3 個

$-\frac{9}{2} < p < -1 - \sqrt{6}$ のとき 4 個

$p = -1 - \sqrt{6}$ のとき 2 個

$-1 - \sqrt{6} < p$ のとき 0 個