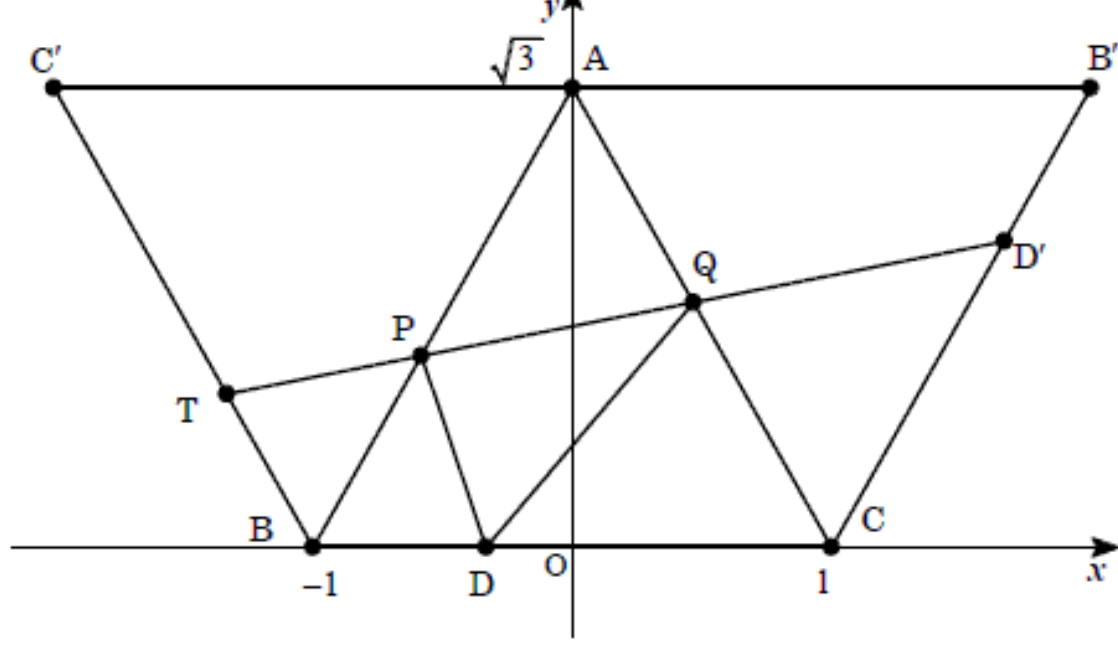


1

【解答】

(1)	ア	$-\frac{4}{3}$	イ	$\frac{1}{\sqrt{3}}$		
(2)	ウ	$\frac{1}{6}s+\frac{1}{3}$	エ	$\frac{5}{6}s-\frac{1}{3}$	オ	$\frac{2}{5}$
(3)	カ	$\frac{\sqrt{31}}{3}$	キ	$\frac{4}{5}$		
(4)	ク	$\frac{2}{3}\sqrt{21}$	ケ	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$		

【解説】



(1)

問題文より、

$$D\left(-\frac{1}{3}, 0\right), E\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

である。直線 AB に関して C と対称な点を C' とすると、

$$C'(-2, \sqrt{3})$$

となる。△ABC と △ABC' は直線 AB に関して対称であるから、直線 AB に関して点 D と対称な点を T とすると、

$$|\overline{BT}| = |\overline{BD}|$$

であり、点 T は線分 BC' 上にあるから、

$$\begin{aligned} \overline{BT} &= \frac{|\overline{BD}|}{|\overline{BC'}|} \overline{BC'} \\ &= \frac{2}{3} (\overline{OC'} - \overline{OB}) \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と求まる。したがって、

$$\begin{aligned} \overline{OT} &= \overline{OB} + \overline{BT} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので、

$$T\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

と求まる。

(2)

(1) と図より、

$$\begin{aligned} \overline{BT} &= \frac{1}{3} \overline{BC'} \\ &= \frac{1}{3} (\overline{BA} - \overline{BC}) \\ &= \frac{1}{3} \overline{BA} - \frac{1}{3} \overline{BC} \end{aligned}$$

であり、

$$\overline{BE} = \frac{1}{2} \overline{BA} + \frac{1}{2} \overline{BC}$$

である。線分 TE を $s:1-s$ で内分する点が R であるから、

$$\begin{aligned} \overline{BR} &= (1-s) \overline{BT} + s \overline{BE} \\ &= (1-s) \left(\frac{1}{3} \overline{BA} - \frac{1}{3} \overline{BC} \right) + s \left(\frac{1}{2} \overline{BA} + \frac{1}{2} \overline{BC} \right) \\ &= \left(\frac{1}{6}s + \frac{1}{3} \right) \overline{BA} + \left(\frac{5}{6}s - \frac{1}{3} \right) \overline{BC} \end{aligned}$$

と表せる。したがって、

$$(m, n) = \left(\frac{1}{6}s + \frac{1}{3}, \frac{5}{6}s - \frac{1}{3} \right)$$

と求まる。また、点 R が線分 AB 上にあるとき、

$$\frac{5}{6}s - \frac{1}{3} = 0$$

であるから、これを解いて、

$$s = \frac{2}{5}$$

と求まる。

(3)

点 T は直線 AB に関する点 D の対称点であるから、点 P が線分 AB 上を動くとき、

$$DP + PE = TP + PE$$

となる。TP + PE は P が直線 TE 上にあるときに最小となるから、

$$DP + PE \geq TE$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned} |\overline{TE}| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{31}}{3} \end{aligned}$$

であるから、DP + PE の最小値は $\frac{\sqrt{31}}{3}$ である。また、このとき点 P は (2) の点 R に一致する

ので、

$$\begin{aligned} \overline{BP} &= \overline{BR} \\ &= \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \right) \overline{BA} \\ &= \frac{2}{5} \overline{BA} \end{aligned}$$

であるから、

$$BP = \frac{2}{5} \cdot 2 = \frac{4}{5}$$

と求まる。

(4)

直線 CA に関して、点 B, D の対称点をそれぞれ B', D' とすると、

$$B'(2, \sqrt{3}), D'\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

となる。(3) と同様に考えると

$$DP + PQ + QD = TP + PQ + QD'$$

であり、点 P, Q が直線 TD' 上にあるとき、TP + PQ + QD' は最小となる。したがって、

$$DP + PQ + QD \geq TD'$$

となる。

$$\begin{aligned} \overline{TD'} &= \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} |\overline{TD'}| &= \sqrt{3^2 + \frac{1}{3}} \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{21} \end{aligned}$$

となる。したがって、DP + PQ + QD の最小値は $\frac{2}{3} \sqrt{21}$ となる。直線 TD' と x 軸のなす角を θ

とすると、

$$\angle BPQ = \theta + \frac{2}{3} \pi$$

である。 $\overline{TD'} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ であるから、

$$\tan \theta = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{3} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \tan \angle BPQ &= \tan \left(\theta + \frac{2}{3} \pi \right) \\ &= \frac{\tan \theta + \tan \frac{2}{3} \pi}{1 - \tan \theta \tan \frac{2}{3} \pi} \\ &= \frac{\frac{1}{3\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot (-\sqrt{3})} \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

と求まる。

2

【解答】

- (1) 線分PQの長さは $\frac{\sqrt{7}}{6}$
- (2) 三角形PQCの面積は $\frac{\sqrt{5}}{12}$
- (3) 最小値は $\frac{\sqrt{42}}{108}$
- (4) r の範囲は $\frac{1}{3} < r < \frac{3}{5}$

【解説】

- (1) $\triangle OAB, \triangle OBC, \triangle OCA$ はすべて1辺が1の正三角形であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。条件より、

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} \end{cases}$$

であるから、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PQ}|^2 &= \left| \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} - \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} |\overrightarrow{OB}|^2 - \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{9} |\overrightarrow{OA}|^2 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{7}{36} \\ \therefore |\overrightarrow{PQ}| &= \frac{\sqrt{7}}{6}\end{aligned}$$

と求まる。

- (2)
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PC}|^2 &= \left| \overrightarrow{OC} - \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} \right|^2 \\ &= |\overrightarrow{OC}|^2 - \frac{2}{3} \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{1}{9} |\overrightarrow{OA}|^2 \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \\ &= \frac{7}{9} \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PC} &= \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{OB} - \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} \right) \cdot \left(\overrightarrow{OC} - \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} \right) \\ &= \frac{1}{9} |\overrightarrow{OA}|^2 - \frac{1}{6} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - \frac{1}{3} \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} \\ &= \frac{1}{9} - \frac{1}{12} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{9}\end{aligned}$$

であるから、 $\triangle PQC$ の面積を S_1 とおくと、

$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2 |\overrightarrow{PC}|^2 - (\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{36} \cdot \frac{7}{9} - \frac{1}{81}} \\ &= \frac{1}{36} \sqrt{49 - 4} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{12}\end{aligned}$$

と求まる。

- (3) $0 \leq r \leq 1$ を満たす実数 r を用いて

$$\overrightarrow{OR} = r \overrightarrow{OC}$$

と表すと

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PR}|^2 &= |\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}|^2 \\ &= \left| r \overrightarrow{OC} - \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} \right|^2 \\ &= r^2 - \frac{r}{3} + \frac{1}{9}\end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{PR}| = \sqrt{r^2 - \frac{1}{3}r + \frac{1}{9}}$$

となり、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} &= \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{OB} - \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} \right) \cdot \left(r \overrightarrow{OC} - \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} \right) \\ &= \frac{1}{9} |\overrightarrow{OA}|^2 - \frac{1}{6} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{r}{2} \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - \frac{r}{3} \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} \\ &= \frac{1}{9} - \frac{1}{12} + \frac{r}{4} - \frac{r}{6} \\ &= \frac{r}{12} + \frac{1}{36}\end{aligned}$$

となるので、 $\triangle PQR$ の面積を $S(r)$ とおくと、

$$\begin{aligned}S(r) &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2 |\overrightarrow{PR}|^2 - (\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{36} \left(r^2 - \frac{1}{3}r + \frac{1}{9} \right) - \left(\frac{r}{12} + \frac{1}{36} \right)^2} \\ &= \frac{1}{24} \sqrt{27r^2 - 10r + 3} \\ &= \frac{1}{24} \sqrt{27 \left(r - \frac{5}{27} \right)^2 + \frac{56}{27}}\end{aligned}$$

となるので、 $S(r)$ は $r = \frac{5}{27}$ のとき、最小値 $\frac{1}{24} \sqrt{\frac{56}{27}} = \frac{\sqrt{42}}{108}$ をとる。

- (4) 実数 u, v を用いて

$$\overrightarrow{PH} = u \overrightarrow{PQ} + v \overrightarrow{PR}$$

とおくと、点Hは $\triangle PQR$ の内部にあるから、

$$u + v < 1, u > 0, v > 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。このとき、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PH} \\ &= \overrightarrow{OP} + u \overrightarrow{PQ} + v \overrightarrow{PR}\end{aligned}$$

が成り立つ。また、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} &= \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} \cdot \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{OB} - \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} \right) \\ &= \frac{1}{6} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \frac{1}{9} |\overrightarrow{OA}|^2 \\ &= \frac{1}{12} - \frac{1}{9} \\ &= -\frac{1}{36} \\ \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PR} &= \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} \cdot \left(r \overrightarrow{OC} - \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} \right) \\ &= \frac{1}{3} r \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} - \frac{1}{9} |\overrightarrow{OA}|^2 \\ &= \frac{1}{6} r - \frac{1}{9}\end{aligned}$$

であるから、 $\overrightarrow{OH} \perp$ 平面PQRのとき、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{PQ} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{OP} + u \overrightarrow{PQ} + v \overrightarrow{PR}) \cdot \overrightarrow{PQ} &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{36} + u \cdot \frac{7}{36} + v \left(\frac{r}{12} + \frac{1}{36} \right) &= 0 \quad \dots \textcircled{2} \\ \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{PR} &= 0 \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{OP} + u \overrightarrow{PQ} + v \overrightarrow{PR}) \cdot \overrightarrow{PR} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{6} r - \frac{1}{9} + u \left(\frac{r}{12} + \frac{1}{36} \right) + v \left(r^2 - \frac{1}{3}r + \frac{1}{9} \right) &= 0 \quad \dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

が成り立つ。②、③より、 u, v について解くと、

$$\begin{cases} u = \frac{2r(3r-1)}{27r^2-10r+3} \\ v = \frac{-5r+3}{27r^2-10r+3} \end{cases}$$

と求まる。点Hが $\triangle PQR$ の内部にあるためには、①が成り立てばよいので、 $0 \leq r \leq 1$ と

$$\begin{aligned}27r^2 - 10r + 3 &= 27 \left(r - \frac{5}{27} \right)^2 + \frac{56}{27} \\ &> 0\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}u &> 0 \\ \Leftrightarrow 3r - 1 &> 0 \\ \therefore r &> \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v &> 0 \\ \Leftrightarrow -5r + 3 &> 0 \\ \therefore r &< \frac{3}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u + v &< 1 \\ \Leftrightarrow \frac{6r^2 - 7r + 3}{27r^2 - 10r + 3} &< 1 \\ \Leftrightarrow 6r^2 - 7r + 3 &< 27r^2 - 10r + 3 \\ \Leftrightarrow 21r^2 - 3r &> 0 \\ \Leftrightarrow r(7r - 1) &> 0 \\ \therefore r &> \frac{1}{7}\end{aligned}$$

であるから、これらをまとめると、

$$\frac{1}{3} < r < \frac{3}{5}$$

となる。これが点Hが $\triangle PQR$ の内部にあるための条件である。

3

(1)

$$t = \sin x + \cos x$$

の両辺を2乗すると、

$$t^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x$$

$$\therefore \sin 2x = t^2 - 1$$

となるので、

$$\begin{aligned} f(x) &= |\sin 2x - 2 \sin x - 2 \cos x + 1| \\ &= |(t^2 - 1) - 2t + 1| \\ &= |t^2 - 2t| \end{aligned}$$

と表せる。よって、

$$g(t) = |t^2 - 2t|$$

である。

$$(\text{答}) \quad g(t) = |t^2 - 2t|$$

(2)

三角関数の合成公式より、

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

である。 $0 \leq x \leq 2\pi$ であるから、 t の取りうる値の範囲は、

$$-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$$

(3)

$$g(t) = \begin{cases} t^2 - 2t & (-\sqrt{2} \leq t < 0) \\ -t^2 + 2t & (0 \leq t \leq \sqrt{2}) \end{cases}$$

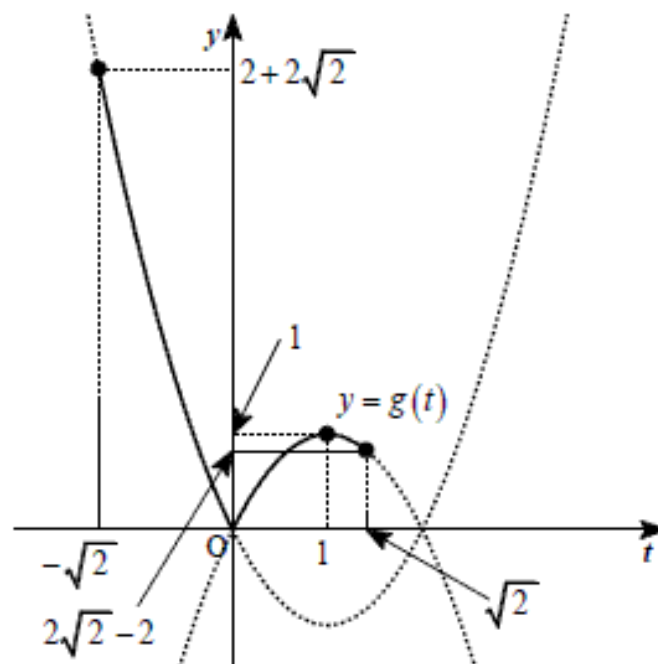
であり、

$$g(-\sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$$

$$g(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2$$

$$g(1) = 1$$

であるから、 $y = g(t)$ のグラフの概形は下記のようになる。



よって、 $g(t)$ の取りうる値の範囲は、

$$0 \leq g(t) \leq 2 + 2\sqrt{2}$$

である。以上より、 $f(x)$ の取りうる値の範囲は、

$$0 \leq f(x) \leq 2 + 2\sqrt{2}$$

である。

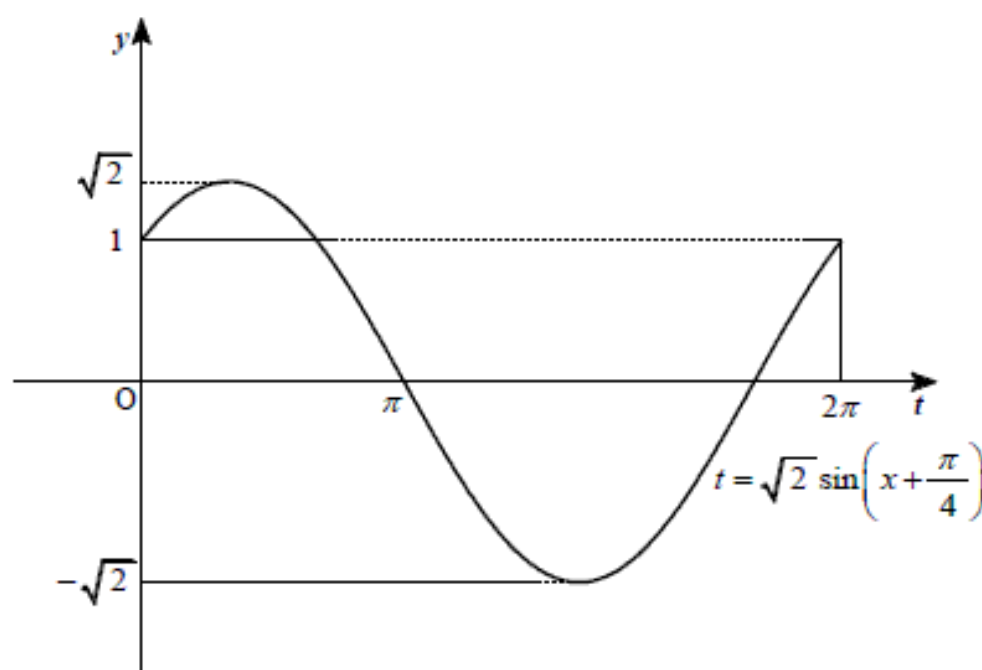
$$(\text{答}) \quad 0 \leq f(x) \leq 2 + 2\sqrt{2}$$

(4)

(2)より、

$$t = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

であるから、 $0 \leq x \leq 2\pi$ のとき、 t と x の関係は下記の図のようになる。



したがって、

$t = 1$ に対応する x は3個

$t = -\sqrt{2}, \sqrt{2}$ に対応する x はそれぞれ1個

それ以外の $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}, t \neq 1$ を満たす t に対応する x はそれぞれ2個

ある。よって、(3)のグラフより、 $f(x) = k$ の異なる実数解の個数 l は、

$$k < 0 \text{ のとき, } l = 0$$

$$k = 0 \text{ のとき, } l = 2$$

$$0 < k < 2\sqrt{2} - 2 \text{ のとき, } l = 4$$

$$k = 2\sqrt{2} - 2 \text{ のとき, } l = 5$$

$$2\sqrt{2} - 2 < k < 1 \text{ のとき, } l = 6$$

$$k = 1 \text{ のとき, } l = 5$$

$$1 < k < 2 + 2\sqrt{2} \text{ のとき, } l = 2$$

$$k = 2 + 2\sqrt{2} \text{ のとき, } l = 1$$

$$k > 2 + 2\sqrt{2} \text{ のとき, } l = 0$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} k < 0, 2 + 2\sqrt{2} < k \text{ のとき} & l = 0 \\ k = 2 + 2\sqrt{2} \text{ のとき} & l = 1 \\ k = 0, 1 < k < 2 + 2\sqrt{2} \text{ のとき} & l = 2 \\ 0 < k < 2\sqrt{2} - 2 \text{ のとき} & l = 4 \\ k = 2\sqrt{2} - 2, 1 \text{ のとき} & l = 5 \\ 2\sqrt{2} - 2 < k < 1 \text{ のとき} & l = 6 \end{cases}$$