

〔解答〕

(1)	ア	5
	イ	-4
(2)	ウ	$-\frac{3}{4}$
	エ	$2\sqrt{2}$
	オ	$\frac{4\sqrt{14}}{7}$
	カ	$\frac{5\sqrt{7}}{4}$

〔解説〕

(1)

 $\triangle ABC$ について、余弦定理より、

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \theta \\ &= 5 - 4 \cos \theta \end{aligned}$$

である。

(2)

 $\triangle ADC$ について、余弦定理より、

$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cos(\pi - \theta) \\ &= 20 + 16 \cos \theta \end{aligned}$$

である。(1)の結果を利用すると、

$$\begin{aligned} 5 - 4 \cos \theta &= 20 + 16 \cos \theta \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} AC^2 &= 5 - 4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 8 \\ \therefore AC &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。また、 $\sin \theta > 0$ より、

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

であるから、 $\triangle ABC$ に正弦定理を用いると、円 C の半径 R_1 は

$$\begin{aligned} 2R_1 &= \frac{AC}{\sin \theta} \\ \Leftrightarrow R_1 &= \frac{2\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{4\sqrt{14}}{7} \end{aligned}$$

となる。また、四角形 $ABCD$ の面積は、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} AB \cdot BC \sin \theta + \frac{1}{2} AD \cdot CD \sin(\pi - \theta) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \\ &= \frac{5\sqrt{7}}{4} \end{aligned}$$

である。

(1)

点Fは線分BD上にあり、 $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BA}$ であるから、 $0 \leq t \leq 1$ を満たす実数 t を用いて

$$\overrightarrow{BF} = t\overrightarrow{BD} = \frac{2t}{5}\overrightarrow{BC} + \frac{3t}{5}\overrightarrow{BA}$$

と書ける。よって、 $\overrightarrow{AF}$ を t を用いて表すと、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AB} + \frac{2t}{5}\overrightarrow{BC} + \frac{3t}{5}\overrightarrow{BA} \\ &= (1-t)\overrightarrow{AB} + \frac{2t}{5}\overrightarrow{AC}\end{aligned}\quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、 $\overrightarrow{AE} = (1-s)\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$ であるから、 $\overrightarrow{AF}$ を s を用いて表すと、

$$\overrightarrow{AF} = k(1-s)\overrightarrow{AB} + ks\overrightarrow{AC} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。 $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ が一次独立であることから、 $0 < s < 1$ より $3s+2 \neq 0$ となることに注意すると、①、②より

$$\begin{aligned}\begin{cases} 1-t = k(1-s) \\ \frac{2t}{5} = ks \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{3s+2} \quad (\because 3s+2 \neq 0) \\ t = \frac{5ks}{2} \end{cases}\end{aligned}$$

である。よって

$$k = \frac{2}{3s+2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad k = \frac{2}{3s+2}$$

(2)

(1)の結果より、

$$t = \frac{5s}{3s+2}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\text{BF} : \text{BD} &= t : 1 = 5s : (3s+2) \\ \therefore \text{BF} : \text{FD} &= 5s : (3s+2-5s) = 5s : 2(1-s)\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}\triangle \text{AFD} &= \frac{\text{AD}}{\text{AC}} \cdot \frac{\text{FD}}{\text{BD}} \triangle \text{ABC} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2(1-s)}{3s+2} \triangle \text{ABC} \\ \triangle \text{EBF} &= \frac{\text{BE}}{\text{BC}} \cdot \frac{\text{FE}}{\text{AE}} \triangle \text{ABC} = s \cdot \frac{3s}{3s+2} \triangle \text{ABC}\end{aligned}$$

となるから、 $\triangle \text{AFD}$ と $\triangle \text{EFB}$ の比を求めると、

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{2(1-s)}{3s+2} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{3s+2}{3s} = \frac{4(1-s)}{15s^2}$$

となる。与えられた条件より、これが2に等しいことから、

$$\begin{aligned}\frac{4(1-s)}{15s^2} &= 2 \\ \Leftrightarrow 2-2s &= 15s^2 \\ \Leftrightarrow 15s^2+2s-2 &= 0 \\ \Leftrightarrow s &= \frac{-1+\sqrt{31}}{15} \quad (\because s > 0)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{-1+\sqrt{31}}{15}$$

(3)

$AB=3$, $AC=2$, $\angle BAC=60^\circ$ より、

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 3$$

である。 $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{BC}$ となるとき、 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\{ (1-s)\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} \} \cdot (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) &= 0 \\ \Leftrightarrow -(1-s)|\overrightarrow{AB}|^2 + s|\overrightarrow{AC}|^2 + (1-2s)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= 0 \\ \Leftrightarrow -9+9s+4s+3-6s &= 0 \\ \Leftrightarrow s &= \frac{6}{7}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{6}{7}$$

3

(1)

直線 OA の傾きは $\frac{2}{3}$ であるから、格子点の座標は

$$(3k, 2k) \quad (k=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

とかける。したがって求める格子点の個数は、

7 個

である。

(答) 7 個

(2)

$\triangle OAB$ の周または内部にある格子点について、 y 座標が Y であるときの x 座標を書き出すと、以下ようになる。

$Y=0$ のとき x 座標は $0 \sim 18$

$Y=1$ のとき x 座標は $2 \sim 18$

$Y=2$ のとき x 座標は $3 \sim 18$

$Y=3$ のとき x 座標は $5 \sim 18$

$Y=4$ のとき x 座標は $6 \sim 18$

$Y=5$ のとき x 座標は $8 \sim 18$

$Y=6$ のとき x 座標は $9 \sim 18$

$Y=7$ のとき x 座標は $11 \sim 18$

$Y=8$ のとき x 座標は $12 \sim 18$

$Y=9$ のとき x 座標は $14 \sim 18$

$Y=10$ のとき x 座標は $15 \sim 18$

$Y=11$ のとき x 座標は $17, 18$

$Y=12$ のとき x 座標は 18

以上より、求める格子点の個数は、

$$19+17+16+14+13+11+10+8+7+5+4+2+1=127 \text{ 個}$$

である。

(答) 127 個

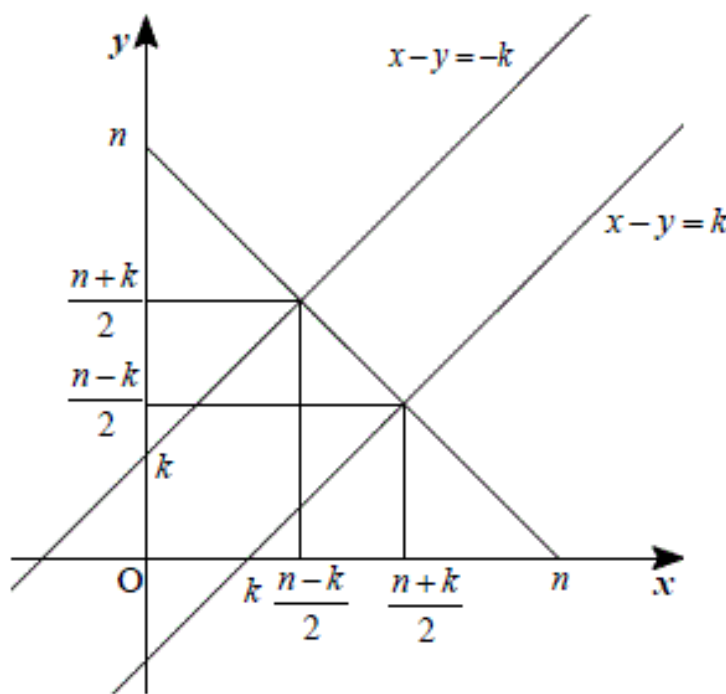
(3)

直線 $x=k$ 上の格子点は $n-k+1$ 個であるから、

$$\begin{aligned} m_1 &= \sum_{k=1}^n k(n-k+1) \\ &= (n+1) \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{1}{6} n(n+1)(n+2) \\ &= \frac{1}{6} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{3} n \end{aligned}$$

である。

また、 $|x-y|=k$ ($k>0$) を図示すると、以下に示す図のようになる。



したがって $|P_x - P_y| = k$ を満たす格子点の個数は、 $[a]$ を a を超えない最大の整数とすると、

$$2 \left[\frac{n-k}{2} + 1 \right] \text{ 個}$$

となる。また $|P_x - P_y| = 0$ を満たす格子点の個数は

$$\left[\frac{n}{2} + 1 \right] \text{ 個}$$

である。以上より、 $|P_x - P_y|$ の総和は、

$$0 \cdot \left[\frac{n}{2} + 1 \right] + \sum_{k=1}^n 2k \left[\frac{n-k}{2} + 1 \right] = \sum_{k=1}^n 2k \left[\frac{n-k}{2} + 1 \right]$$

である。

[1] n が偶数のとき、

整数 m を用いて $n=2m$ とおくと、

$$\begin{aligned} m_2 &= \sum_{k=1}^{2m} 2k \left[\frac{2m-k}{2} + 1 \right] \\ &= \sum_{k=1}^{2m} 2k \left[m+1 - \frac{k}{2} \right] \\ &= \sum_{l=1}^m 2 \cdot (2l-1) \left[m+1 - \frac{2l-1}{2} \right] + \sum_{l=1}^m 2 \cdot 2l \left[m+1 - \frac{2l}{2} \right] \\ &= 2 \sum_{l=1}^m (2l-1)(m+1-l) + 2 \sum_{l=1}^m 2l(m+1-l) \\ &= 2 \sum_{l=1}^m (4l-1)(m+1-l) \\ &= 2 \sum_{l=1}^m \{ -4l^2 + (4m+5)l - (m+1) \} \\ &= 2 \left\{ -4 \cdot \frac{1}{6} m(m+1)(2m+1) + (4m+5) \cdot \frac{1}{2} m(m+1) - (m+1)m \right\} \\ &= \frac{1}{3} m(m+1)(4m+5) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \left(4 \cdot \frac{n}{2} + 5 \right) \\ &= \frac{1}{6} n^3 + \frac{3}{4} n^2 + \frac{5}{6} n \end{aligned}$$

となる。

[2] n が奇数のとき

整数 m を用いて $n=2m-1$ とおくと、

$$\begin{aligned} m_3 &= \sum_{k=1}^{2m-1} 2k \left[\frac{2m-1-k}{2} + 1 \right] \\ &= \sum_{k=1}^{2m-1} 2k \left[m + \frac{1-k}{2} \right] \\ &= \sum_{l=1}^m 2(2l-1) \left[m + \frac{1-2l+1}{2} \right] + \sum_{l=1}^{m-1} 2 \cdot 2l \left[m + \frac{1-2l}{2} \right] \\ &= \sum_{l=1}^m 2(2l-1) \left[m+1-l \right] + \sum_{l=1}^{m-1} 4l \left[m-l + \frac{1}{2} \right] \\ &= \sum_{l=1}^m 2(2l-1)(m+1-l) + \sum_{l=1}^{m-1} 4l(m-l) \end{aligned}$$

となるが、

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{m-1} 4l(m-l) + 0 &= \sum_{l=1}^{m-1} 4l(m-l) + 4m(m-m) \\ &= \sum_{l=1}^m 4l(m-l) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} m_3 &= \sum_{l=1}^m 2(2l-1)(m+1-l) + \sum_{l=1}^m 4l(m-l) \\ &= 2 \sum_{l=1}^m (2l-1)(m+1-l) + 2 \sum_{l=1}^m \{ 2l(m-l+1) - 2l \} \\ &= 2 \sum_{l=1}^m \{ (4l-1)(m+1-l) - 2l \} \\ &= \frac{1}{3} m(m+1)(4m+5) - 4 \cdot \frac{1}{2} m(m+1) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{n+1}{2} \left(\frac{n+1}{2} + 1 \right) \left(4 \cdot \frac{n+1}{2} + 5 \right) - 2 \cdot \frac{n+1}{2} \left(\frac{n+1}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{6} n^3 + \frac{3}{4} n^2 + \frac{5}{6} n + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad m_1 = \frac{1}{6} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{3} n, \quad m_2 = \frac{1}{6} n^3 + \frac{3}{4} n^2 + \frac{5}{6} n, \quad m_3 = \frac{1}{6} n^3 + \frac{3}{4} n^2 + \frac{5}{6} n + \frac{1}{4}$$