

【解答】

(1)	$\overline{ア}$
	$(0, -1)$
(2)	$\overline{イ}$
	$a < -1$
(3)	$\overline{ウ}$
	-7
(4)	$\overline{エ}$
	$-9 \pm 2\sqrt{15}$

【解説】

(1)

$$x^2 + y^2 - 4ax + 2y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y+1)^2 - 4x \cdot a = 0$$

と変形できる。ここで、上式が a の値によらず成立するのは、

$$\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 = 0 \\ -4x = 0 \end{cases}$$

$$\therefore (x, y) = (0, -1)$$

を満たす場合であるから、 a の値に関係なく、 C_2 は定点 $(0, -1)$ を通る。

(2)

2つの円が異なる2点で交わる条件は、

$$(2 \text{ つの円の半径の差}) < (2 \text{ つの円の中心間の距離}) < (2 \text{ つの円の半径の和}) \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つことである。仮定より

$$C_1 : (x+2)^2 + (y-3)^2 = 2^2$$

$$C_2 : (x-2a)^2 + (y+1)^2 = (2a)^2$$

となるから、

$$C_1 \text{ は半径 } 2, \text{ 中心 } (-2, 3) \text{ の円}$$

$$C_2 \text{ は半径 } 2|a|, \text{ 中心 } (2a, -1) \text{ の円}$$

となる。よって①式は

$$|2 - 2|a|| < \sqrt{(2a+2)^2 + (-1-3)^2} < 2 + 2|a|$$

$$\Leftrightarrow |2 - 2|a|| < 2\sqrt{a^2 + 2a + 5} < 2 + 2|a|$$

となるが、すべての項は負でないから

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow (2 - 2|a|)^2 < 4(a^2 + 2a + 5) < (2 + 2|a|)^2 \cdots \textcircled{2}$$

となる。 $a > 0$ のとき②式について

$$(右辺) - (中辺) = 4a^2 + 8a + 4 - 4(a^2 + 2a + 5)$$

$$= -16$$

$$< 0$$

となるから、②式は成り立たないので $a > 0$ は不適である。よって $a \neq 0$ から $a < 0$ が必要である。

$a < 0$ のとき②式について

$$(右辺) - (中辺) = 4a^2 - 8a + 4 - 4(a^2 + 2a + 5)$$

$$= -16(a+1)$$

となるから、②式が成り立つためには

$$-16(a+1) > 0$$

$$\Leftrightarrow a < -1 \cdots \textcircled{3}$$

が必要である。再び $a < 0$ のとき②式について

$$(中辺) - (左辺) = 4(a^2 + 2a + 5) - (2 + 2a)^2$$

$$= 4a^2 + 8a + 20 - (4a^2 + 8a + 4)$$

$$= 16$$

$$> 0$$

となるから、③と合わせて $a < -1$ のとき②式は成り立つ。よって求める a の範囲は

$$a < -1$$

である。

(3)

$$\begin{cases} C_1 : x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0 \\ C_2 : x^2 + y^2 - 4ax + 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

から、二式の両辺を引くと

$$4(a+1)x - 8y + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+1)x - 2y + 2 = 0 \cdots \textcircled{4}$$

となる。2点 P, Q の座標 (x, y) は④を満たすから、2点 P, Q を結ぶ直線の方程式は④式となる。

$a < -1$ のとき、④式の直線の傾きは

$$\frac{a+1}{2}$$

であるから、これが -3 に等しいとき

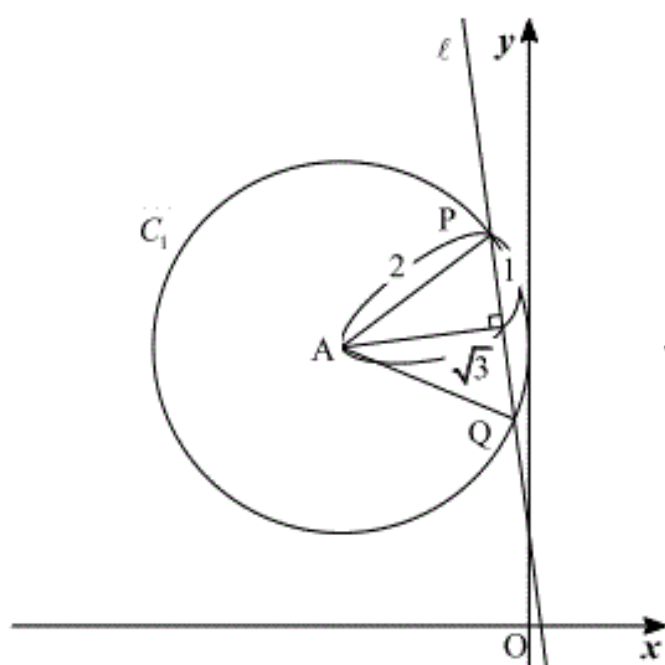
$$\frac{a+1}{2} = -3$$

$$\therefore a = -7$$

となり、これは $a < -1$ に適する。

(4)

④式が表す直線を ℓ とする。



$\triangle APQ$ が正三角形のとき、各点の位置関係の一例として上図が挙げられる。よって直線 $\ell : (a+1)x - 2y + 2 = 0$ と点 $A(-2, 3)$ の距離が $\sqrt{3}$ となるから、

$$\frac{|-2(a+1) - 6 + 2|}{\sqrt{(a+1)^2 + (-2)^2}} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2|a+3| = \sqrt{3a^2 + 6a + 15}$$

$$\Leftrightarrow 4(a+3)^2 = 3a^2 + 6a + 15$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 18a + 21 = 0$$

$$\therefore a = -9 \pm 2\sqrt{15}$$

となる。ここで、 $-9 - 2\sqrt{15} (< -9) < -1$ であり

$$\sqrt{60} < \sqrt{64}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{15} < 8$$

$$\Leftrightarrow -9 + 2\sqrt{15} < -1$$

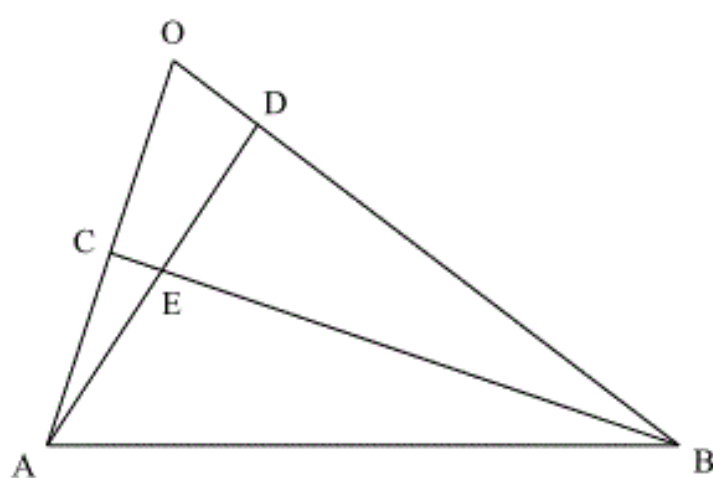
より、 $a = -9 \pm 2\sqrt{15}$ はいずれも $a < -1$ を満たすから、求める値は $a = -9 \pm 2\sqrt{15}$ となる。

〔解答〕

(1)	$\overrightarrow{OE} = \frac{5\vec{a} + \vec{b}}{11}$
(2)	$k = \frac{t - 3t^2}{1 - 3t^2}$
(3)	$t = \frac{4 - \sqrt{13}}{3}$

〔解説〕

(1)



メネラウスの定理より

$$\begin{aligned} \frac{CA}{OC} \cdot \frac{ED}{AE} \cdot \frac{BO}{DB} &= 1 \\ \Leftrightarrow 1 \cdot \frac{ED}{AE} \cdot \frac{6}{5} &= 1 \\ \therefore AE : ED &= 6 : 5 \end{aligned}$$

となる。よって点Eは線分ADを6:5に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OE} = \frac{5\vec{a} + 6\overrightarrow{OD}}{11} = \frac{5\vec{a} + 6 \cdot \frac{1}{6}\vec{b}}{11} = \frac{5\vec{a} + \vec{b}}{11}$$

となる。

(2)

 $0 < t < \frac{1}{3}$ から, (1)と同様にメネラウスの定理より

$$\begin{aligned} \frac{FA}{OF} \cdot \frac{HG}{AH} \cdot \frac{BO}{GB} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1-3t}{3t} \cdot \frac{HG}{AH} \cdot \frac{1}{1-t} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{HG}{AH} &= \frac{3t(1-t)}{1-3t} \\ \therefore AH : HG &= (1-3t) : 3t(1-t) \end{aligned}$$

となる。よって△OABの面積を S とすると△OAHの面積は

$$\begin{aligned} S \cdot \frac{OG}{OB} \cdot \frac{AH}{AG} &= S \cdot t \cdot \frac{1-3t}{1-3t+3t(1-t)} \\ &= \frac{t-3t^2}{1-3t^2} S \end{aligned}$$

となり, これが kS に等しいから

$$k = \frac{t-3t^2}{1-3t^2}$$

となる。

(3)

仮定より

$$\begin{cases} \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OG} - \vec{a} = -\vec{a} + t\vec{b} \\ \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{OF} - \vec{b} = 3t\vec{a} - \vec{b} \end{cases}$$

となる。また, △OABの一辺の長さを d とすると, △OABは正三角形であるから

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = d^2 \cdot \cos 60^\circ = \frac{d^2}{2}$$

となる。線分AGとBFが直交するとき, $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BF} = 0$ となるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BF} &= 0 \\ \Leftrightarrow (-\vec{a} + t\vec{b}) \cdot (3t\vec{a} - \vec{b}) &= 0 \\ \Leftrightarrow -3t|\vec{a}|^2 + (3t^2 + 1)\vec{a} \cdot \vec{b} - t|\vec{b}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3t^2 - 8t + 1)d^2 &= 0 \\ \therefore t &= \frac{4 - \sqrt{13}}{3} \left(\because 0 < t < \frac{1}{3}, d > 0 \right) \end{aligned}$$

となる。

(1)

数列を

$$\{1\}, \{1, 4\}, \{1, 4, 7\}, \dots$$

というように群に区切り、左から n 番目の群を第 n 群と呼ぶことにする。第 n 群には n 個の要素が含まれており、各群の k 項目は

$$1+3(k-1)=3k-2 \quad \dots \textcircled{1}$$

と表される。ここで第1群から n 群までには

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1) \text{ (個)}$$

の数が含まれているから、 $n \geq 2$ のとき、第 n 群の1項目は左から

$$\frac{1}{2}(n-1)n+1 = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n+1 \text{ (項目)} \quad \dots \textcircled{2}$$

となり、これは $n=1$ について成り立つ。 $n=20$ のとき、②は

$$\frac{1}{2} \cdot 20^2 - \frac{1}{2} \cdot 20 + 1 = 191$$

となり、 $n=21$ のとき②は

$$\frac{1}{2} \cdot 21^2 - \frac{1}{2} \cdot 21 + 1 = 211$$

となるから、第200項は第20群10項目の数である。よって求める数は①より

$$3 \cdot 10 - 2 = 28$$

となる。

(答) 28

(2)

(1)より、初項から第20群10項目の数の和を求めればよい。第 n 群に含まれる数の和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (3k-2) &= \frac{3}{2}n(n+1) - 2n \\ &= \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となるから、第1群から第19群までの数の和は

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{19} \left(\frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \right) &= \frac{1}{4} \cdot 19 \cdot 20 \cdot 39 - \frac{1}{4} \cdot 19 \cdot 20 \\ &= 95(39-1) \\ &= 95 \cdot 38 \\ &= 3610 \end{aligned}$$

となる。また、第20群1項目から10項目までの数の和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (3k-2) &= \frac{3}{2} \cdot 10 \cdot 11 - 20 \\ &= 145 \end{aligned}$$

となる。よって求める値は

$$3610 + 145 = 3755$$

となる。

(答) 3755

(3)

③式より、第1群から第 n 群までに含まれる数の和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{2}k^2 - \frac{1}{2}k \right) &= \frac{1}{4}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{4}n(n+1) \\ &= \frac{1}{2}n^2(n+1) \end{aligned}$$

となる。ここで $\frac{1}{2}n^2(n+1)$ について

$$\begin{cases} n=21 \Rightarrow \frac{1}{2}n^2(n+1) = 4851 \\ n=22 \Rightarrow \frac{1}{2}n^2(n+1) = 5566 \\ n=23 \Rightarrow \frac{1}{2}n^2(n+1) = 6348 \end{cases}$$

となるから、 $5000 < S_n < 6000$ を満たすのは第22群の途中から第23群の途中までだとわかる。

第22群の k 項目が $S_n > 5000$ を満たすと仮定すると①より

$$\begin{aligned} 4851 + \sum_{m=1}^k (3m-2) &> 5000 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{2}k(k+1) - 2k &> 149 \\ \Leftrightarrow 3k^2 - k &> 298 \end{aligned}$$

となるから、最小の k は

$$k=11$$

であり、これは左から数えて

$$\frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 22 + 11 = 242 \text{ (項目)}$$

である。また、第23群の i 項目が $S_n < 6000$ を満たすとき

$$\begin{aligned} 5556 + \frac{3}{2}i(i+1) - 2i &< 6000 \\ \Leftrightarrow 3i^2 - i &< 888 \end{aligned}$$

となるから、最大の i は

$$i=17$$

となり、これは左から数えて

$$\frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 23 + 17 = 270 \text{ (項目)}$$

である。よって

$$\begin{aligned} 5000 < S_n &< 6000 \\ \Leftrightarrow 242 \leq n &\leq 270 \end{aligned}$$

となるから、求める個数は

$$270 - 242 + 1 = 29 \text{ (個)}$$

である。

(答) 29 個