

〔解答〕

(1)	ア	50				
(2)	イ	2	ウ	30	エ	1680
(3)	オ	$\frac{1}{2}$	カ	$\frac{5}{64}$		

〔解説〕

- (1)
正多面体は、正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体の5つが存在するので、求める値は
- $$4+6+8+12+20=50$$
- である。

- (2)
すべての正 n 面体で、1の面を固定して考える。 $n=4$ のとき、残りの3面は円順列を考えればよいので、求める場合の数は、
- $$(3-1)!=2!=2 \text{ (通り)}$$
- である。 $n=6$ のとき、1の面の対面の数字は5通りあり、残りの側面4面は円順列を考えればよいので、求める場合の数は、
- $$5\cdot(4-1)!=30 \text{ (通り)}$$
- である。 $n=8$ のとき、1の面の対面の数字は7通りある。1とその対面の数字以外で最小の数字を書く面を考える。このとき、1の書かれた面とその数の書かれた面が辺を共有する場合と共有しない場合の2通りがあり、それぞれの場合で残り5つの面に数字を書いていく方法を考えると、求める場合の数は、
- $$7\cdot2\cdot5!=1680 \text{ (通り)}$$
- である。

- (3)
(i)
出た目の積が4の倍数となるのは、次の場合である。

- [1] 4面ダイスの目が4の倍数であるとき
- このとき、4面ダイスの目は4であるから、[1]が起こる確率は $\frac{1}{4}$ である。
- [2] 4面ダイスの目が4の倍数ではなく2の倍数であり、8面ダイスの目が2の倍数のとき
- このとき、4面ダイスの目は2であり、8面ダイスの目は2, 4, 6, 8の合計4つのうちいずれかであるから、[2]が起こる確率は $\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{8}=\frac{1}{8}$ である。
- [3] 4面ダイスが2の倍数ではなく8面ダイスが4の倍数のとき
- このとき、4面ダイスの目は1, 3の合計2つのうちいずれかであり、8面ダイスの目は4, 8の合計2つのうちいずれかであるから、[3]が起こる確率は $\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{8}=\frac{1}{8}$ である。

以上[1], [2], [3]より、求める確率は、

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

である。

- (ii)
4面ダイス、6面ダイス、8面ダイスの出た目をそれぞれ x, y, z とする。このとき、
- $$xyz \geq 100 \qquad \cdots \text{①}$$

かつ、

$$1 \leq x \leq 4 \text{ かつ } 1 \leq y \leq 6 \text{ かつ } 1 \leq z \leq 8$$

を満たす、自然数 x, y, z の組を探せばよい。以下、 x の値に応じて場合分けを行う。

- [1] $x=1$ のとき
- ①は $yz \geq 100$ となるが、これを満たす y, z は存在しない。
- [2] $x=2$ のとき
- ①は $yz \geq 50$ となるが、これを満たす y, z は存在しない。
- [3] $x=3$ のとき
- ①は $yz \geq \frac{100}{3}$ となり、これを満たす (y, z) の組は、
- $$(y, z)=(5, 7), (5, 8), (6, 6), (6, 7), (6, 8)$$
- の5組である。
- [4] $x=4$ のとき
- ①は $yz \geq 25$ となり、これを満たす (y, z) の組は、
- $$(y, z)=(4, 7), (4, 8), (5, 5), (5, 6), (5, 7), (5, 8), (6, 5), (6, 6), (6, 7), (6, 8)$$
- の10組である。

以上、[1]から[4]より、①を満たす (x, y, z) の組は全部で $5+10=15$ 通りある。一方、3つのダイスの目の組は全部で $4\cdot6\cdot8=192$ 通りあるので、求める確率は、

$$\frac{15}{192}=\frac{5}{64}$$

である。

2

【解答】

(1) k の値の範囲は $-27 < k < 5$

(2) $\cos A = \frac{1}{8}$ 外接円の半径は $\frac{32\sqrt{7}}{21}$

(3) $\frac{CQ}{CR} = \frac{2-t}{2}$ $t = \frac{2}{3}$

【解説】

(1)

$x^3 - 3x^2 - 9x - k = 0$ を変形すると

$$x^3 - 3x^2 - 9x = k$$

となる。よって、 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ とすると、方程式が異なる 3 個の実数解を持つことは、

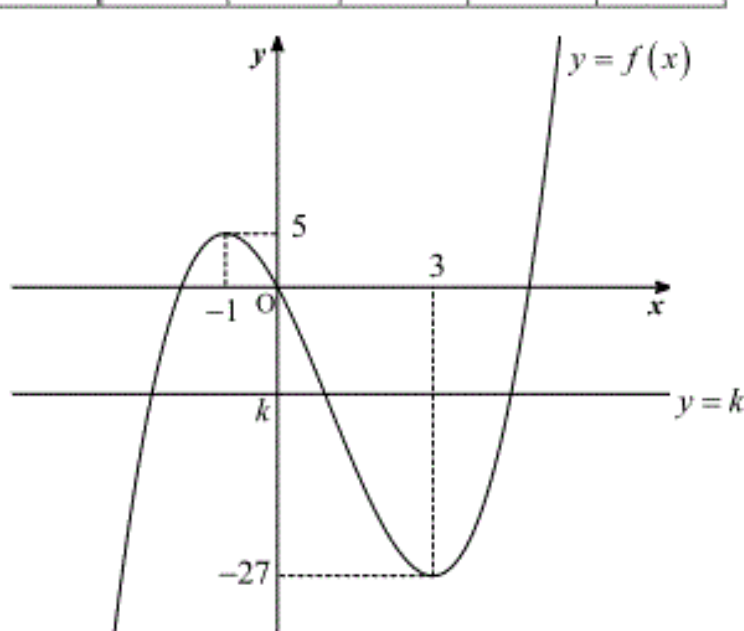
$y = f(x)$ と $y = k$ のグラフの共有点が 3 つ存在することと同値である。 $f(x)$ を x で微分すると

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$= 3(x-3)(x+1)$$

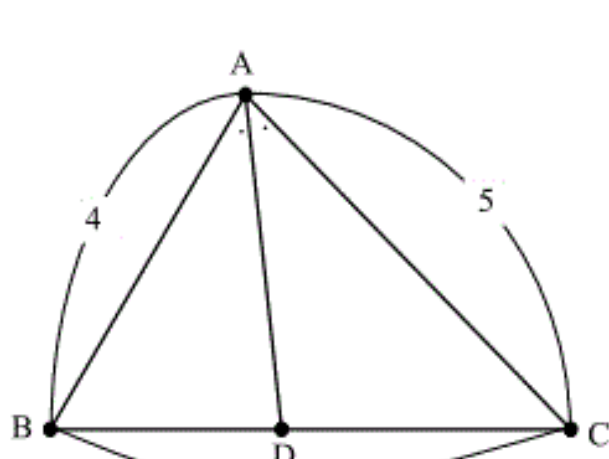
となるので、増減表とグラフは以下のようになる。

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$



よって、求める k の範囲は $-27 < k < 5$ である。

(2)



余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} \\ &= \frac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

となる。これより

$$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2} = \frac{7}{16}$$

となり、 $\angle BAD = \frac{1}{2}A$ かつ $\sin \angle BAD > 0$ であるから

$$\sin \angle BAD = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

とわかる。また、 D は $\angle A$ の二等分線と BC の交点であるから、

$$AB : AC = BD : DC$$

$$\Leftrightarrow BD : DC = 4 : 5$$

であるから

$$BD = \frac{4}{4+5}BC = \frac{4}{9} \cdot 6 = \frac{8}{3}$$

が得られる。三角形 ABD の外接円の直径を D とすると、正弦定理より

$$\begin{aligned} D &= \frac{BD}{\sin \angle BAD} \\ &= \frac{\frac{8}{3} \cdot \frac{4}{\sqrt{7}}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} \\ &= \frac{32\sqrt{7}}{21} \end{aligned}$$

とわかる。

(3)



$\triangle CAR$ と直線 PB についてメネラウスの定理を適用すると、

$$\frac{CP}{PA} \cdot \frac{AB}{BR} \cdot \frac{RQ}{QC} = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。また、 $\triangle BAP$ と直線 RC についてメネラウスの定理を適用すると、

$$\frac{BR}{RA} \cdot \frac{AC}{CP} \cdot \frac{PQ}{QB} = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。問題文より

$$AP : PC = 1 : 1$$

$$BQ : QP = t : (1-t)$$

であるから、 $\textcircled{2}$ より

$$\begin{aligned} \frac{BR}{RA} &= \frac{QB}{PQ} \cdot \frac{CP}{AC} \\ &= \frac{t}{1-t} \cdot \frac{1}{1+1} \\ &= \frac{t}{2(1-t)} \end{aligned}$$

が得られる。これを $\textcircled{1}$ に代入して

$$\begin{aligned} \frac{RQ}{QC} &= \frac{PA}{CP} \cdot \frac{BR}{AB} \\ &= \frac{1}{1} \cdot \frac{t}{2(1-t)+t} \\ &= \frac{t}{2-t} \end{aligned}$$

であるから

$$\frac{CQ}{CR} = \frac{2-t}{(2-t)+t} = \frac{2-t}{2}$$

と表せる。三角形 ABC の面積を S とすると

$$\begin{aligned} \triangle BQR &= \frac{BR}{AB} \cdot \frac{RQ}{CR} S \\ &= \frac{t}{2-t} \cdot \frac{t}{2} S \\ &= \frac{t^2}{2(2-t)} S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle CQP &= \frac{PC}{AC} \cdot \frac{QP}{BP} S \\ &= \frac{1}{1+1} \cdot \frac{1-t}{1} S \\ &= \frac{1-t}{2} S \end{aligned}$$

となるので、この 2 つの面積が等しいとき

$$\frac{t^2}{2(2-t)} S = \frac{1-t}{2} S$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 = 2(1-t)(2-t) \quad (\because 0 < t < 1)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$$

である。

3

(1)

 $y = 4x^2 + x$ の導関数は

$$y' = 8x + 1$$

であるから、 C 上の点 $(1, 5)$ における接線の方程式は

$$y = (8 \cdot 1 + 1)(x - 1) + 5$$

$$\therefore y = 9x - 4$$

となる。

(答) $y = 9x - 4$

(2)

(1)より、 C 上の点 $(t, 4t^2 + t)$ における接線を ℓ とおくと、 ℓ の方程式は

$$y = (8t + 1)(x - t) + 4t^2 + t$$

$$\therefore y = (8t + 1)x - 4t^2$$

である。この接線が点 $(0, -a)$ を通るので

$$-a = (8t + 1) \cdot 0 - 4t^2$$

$$\Leftrightarrow 4t^2 = a$$

$$\therefore t = \pm \frac{\sqrt{a}}{2} \quad (\because a > 0)$$

である。直線 ℓ の傾きは $8t + 1$ で、 t が大きいほど傾きも大きくなる。したがって、 $t = \frac{\sqrt{a}}{2}$ のときの方が $t = -\frac{\sqrt{a}}{2}$ のときより直線 ℓ の傾きが大きいので

$$\ell_1: y = (4\sqrt{a} + 1)x - a, A_1\left(\frac{\sqrt{a}}{2}, a + \frac{\sqrt{a}}{2}\right)$$

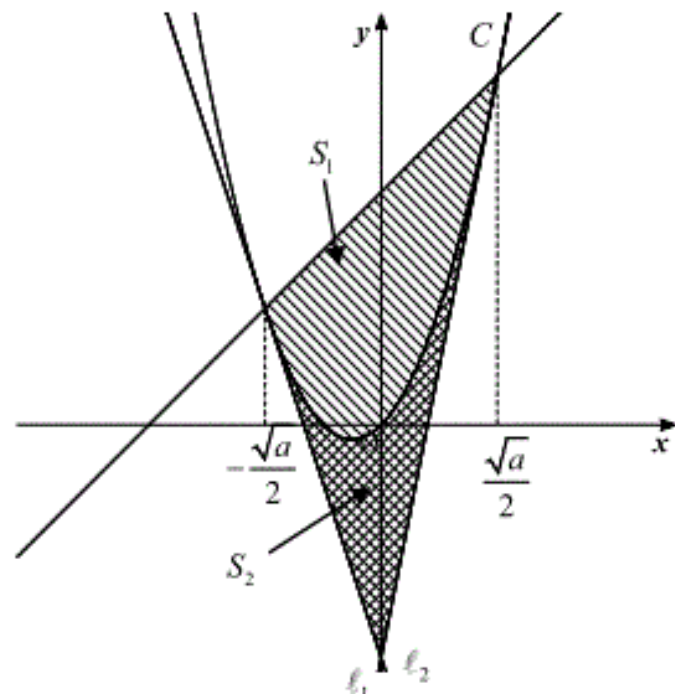
$$\ell_2: y = (-4\sqrt{a} + 1)x - a, A_2\left(-\frac{\sqrt{a}}{2}, a - \frac{\sqrt{a}}{2}\right)$$

となる。

(答) $\ell_1: y = (4\sqrt{a} + 1)x - a, \ell_2: y = (-4\sqrt{a} + 1)x - a,$

$$A_1\left(\frac{\sqrt{a}}{2}, a + \frac{\sqrt{a}}{2}\right), A_2\left(-\frac{\sqrt{a}}{2}, a - \frac{\sqrt{a}}{2}\right)$$

(3)

 A_1, A_2 を通る直線の方程式は

$$y = \frac{\left(a + \frac{\sqrt{a}}{2}\right) - \left(a - \frac{\sqrt{a}}{2}\right)}{\frac{\sqrt{a}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{a}}{2}\right)} \left(x - \frac{\sqrt{a}}{2}\right) + a + \frac{\sqrt{a}}{2}$$

$$\therefore y = x + a$$

である。グラフより、求める面積は

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-\frac{\sqrt{a}}{2}}^{\frac{\sqrt{a}}{2}} \left\{ (x + a) - (4x^2 + x) \right\} dx \\ &= \int_{-\frac{\sqrt{a}}{2}}^{\frac{\sqrt{a}}{2}} (-4x^2 + a) dx \\ &= -4 \int_{-\frac{\sqrt{a}}{2}}^{\frac{\sqrt{a}}{2}} \left(x - \frac{\sqrt{a}}{2} \right) \left(x + \frac{\sqrt{a}}{2} \right) dx \\ &= 4 \cdot \frac{1}{6} \left\{ \frac{\sqrt{a}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{a}}{2} \right) \right\}^3 \\ &= \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}}$

(4)

グラフより S_2 は

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-\frac{\sqrt{a}}{2}}^0 \left[(4x^2 + x) - \left\{ (-4\sqrt{a} + 1)x - a \right\} \right] dx + \int_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}} \left[(4x^2 + x) - \left\{ (4\sqrt{a} + 1)x - a \right\} \right] dx \\ &= \int_{-\frac{\sqrt{a}}{2}}^0 (2x + \sqrt{a})^2 dx + \int_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}} (2x - \sqrt{a})^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{6} (2x + \sqrt{a})^3 \right]_{-\frac{\sqrt{a}}{2}}^0 + \left[\frac{1}{6} (2x - \sqrt{a})^3 \right]_0^{\frac{\sqrt{a}}{2}} \\ &= \frac{1}{6} a^{\frac{3}{2}} - \left(-\frac{1}{6} a^{\frac{3}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{3} a^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

となるので、(3)の結果より

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{3} a^{\frac{3}{2}}} = 2$$

である。

(答) $\frac{S_1}{S_2} = 2$