

1

【解答】

(1)	ア	イ
	20	90
(2)	ウ	エ
	8	30
(3)	オ	カ
	$3\sqrt{3}+2\sqrt{6}$	$\frac{5\sqrt{2}+7}{6}$

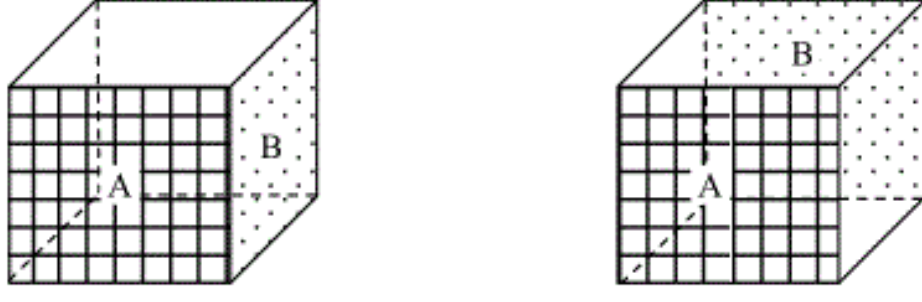
【解説】

(1) さいころの各面に A, B の 2 色を 3 面ずつ塗る場合の数は、6 面から A を塗る 3 面を選ぶ場合の数に等しいため、
 ${}_6C_3 = 20$ (通り)
 となる。また 3 色で 2 面ずつ塗る場合の数は、6 面から A を塗る 2 面を選んだあと、残りの 4 面から B を塗る 2 面を選ぶ場合の数に等しいため、
 ${}_6C_2 \cdot {}_4C_2 = 90$ (通り)
 となる。

(2) A, B の 2 色で塗り分けるとする。A を塗る面の数で場合分けする。
 [1] 1 面のとき
 残り 5 面はすべて B となるため 1 通りのみとなる。
 [2] 2 面のとき
 A が隣り合う面に塗られるときと向かい合う面に塗られるときがあるから、2 通りである。
 [3] 3 面のとき
 A が塗られる面について、どの 2 面も向かい合わないときと、ある 2 面が向かい合うときがあるから、2 通りである。
 [4] 4 面のとき
 このとき B を塗る面は 2 面であるから、[2] と同様に考えて 2 通りである。
 [5] 5 面のとき
 このとき B を塗る面は 1 面であるから、[1] と同様に考えて 1 通りである。

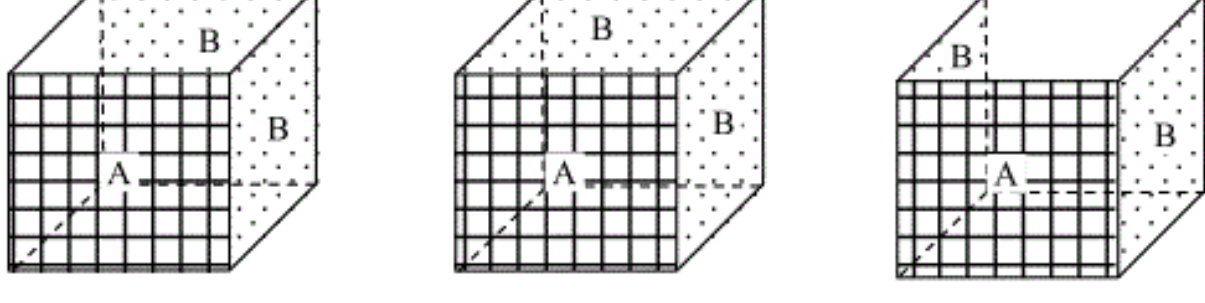
以上、[1], [2], [3], [4], [5] より正六面体を 2 色で塗る方法は 8 通りとなる。
 次に、3 色を塗る場合を考える。A, B, C と 3 つの色を名付けたとき、各色が塗られる面の数の組み合わせは (1, 1, 4), (1, 2, 3), (2, 2, 2) およびその並び替えが考えられる。それぞれのパターンで場合分けをする。

[1] (1, 1, 4) またはその並び替えの場合
 A, B が 1 面ずつ、C が 4 面塗られるときを考える。A, B を塗る面が隣り合う場合と向かい合う場合があるから、2 通りである。



どの色が 4 面塗られる場合もそれぞれ 2 通りずつであるため、全部で 6 通りとなる。

[2] (1, 2, 3) またはその並び替えの場合
 A が 1 面、B が 2 面、C が 3 面塗られるとする。A が塗られた面の裏面が B のときは 1 通り、裏面が C のときは B が隣り合っているときと対面に位置しているときの 2 通りある。よって、A を 1 面、B を 2 面、C を 3 面塗る塗り方は 3 通りある。

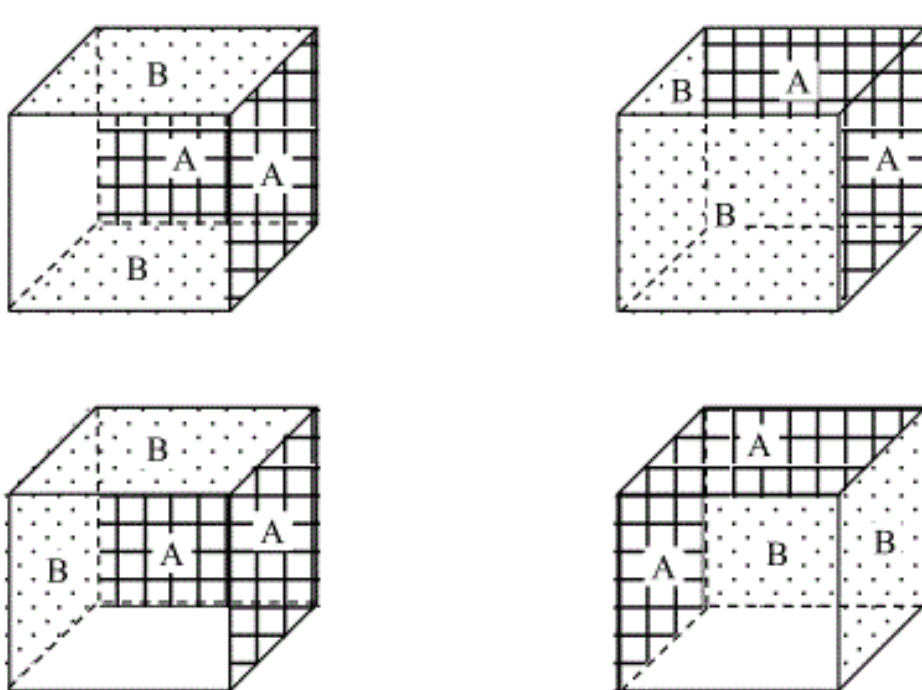


A, B, C の入れ替えは 6 通りあるから、全部で 18 通りとなる。

[3] (2, 2, 2) の場合
 まず A が向かい合う 2 面に塗られるときを考える。B を塗る面が向かい合う場合と、隣り合う場合があるから、2 通りとなる。



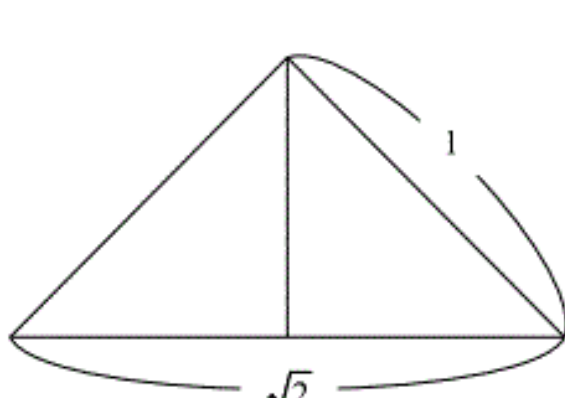
次に A が隣り合う 2 面に塗られる場合を考える。B が向かい合う面に塗られているときに 1 通り、C が向かい合う面に塗られているときに 1 通り、いずれの色も同じ色同士隣り合って塗られているときに 2 通りあるから、合計で 4 通りである。



以上より、全部で 6 通りとなる。

以上、[1], [2], [3] より正六面体の各面を 3 色で塗り分ける方法は 30 通りある。

(3) 底面が正方形で、辺の長さがすべて 1 の四角錐を Q とする。底面の正方形の対角線と頂点を通る平面で Q を切ったとき、断面は以下の図のようになる。



よって四角錐 Q の高さは、

$$\sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

となる。したがって、正八面体 P の対頂点間の距離は

$$1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

である。一方、辺の長さが 1 の正八面体を R とすると、 R の対頂点間の距離は $\sqrt{2}$ である。よって、正八面体 P と正八面体 R の相似比は

$$(1 + \sqrt{2}) : \sqrt{2}$$

となる。したがって、正八面体 P と正八面体 R の面積比は

$$(1 + \sqrt{2})^2 : \sqrt{2}^2 = (3 + 2\sqrt{2}) : 2$$

であり、体積比は

$$(1 + \sqrt{2})^3 : \sqrt{2}^3 = (7 + 5\sqrt{2}) : 2\sqrt{2}$$

である。ところで、正八面体 R の表面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ \cdot 8 = 2\sqrt{3}$$

である。また、正八面体 R は、四角錐 Q が 2 つあったときにその底面同士を貼り合わせたものと考えられるから、体積は

$$\left(\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 2 = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

である。以上より、正八面体 P の表面積は

$$2\sqrt{3} \cdot \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$$

となり、正八面体 P の体積は、

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{7 + 5\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2} + 7}{6}$$

となる。

2

(1)

$f(x) = x^3 - 3a^2x + 2a^3$ を微分すると、

$$f'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x+a)(x-a)$$

となる。 $a > 0$ より、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

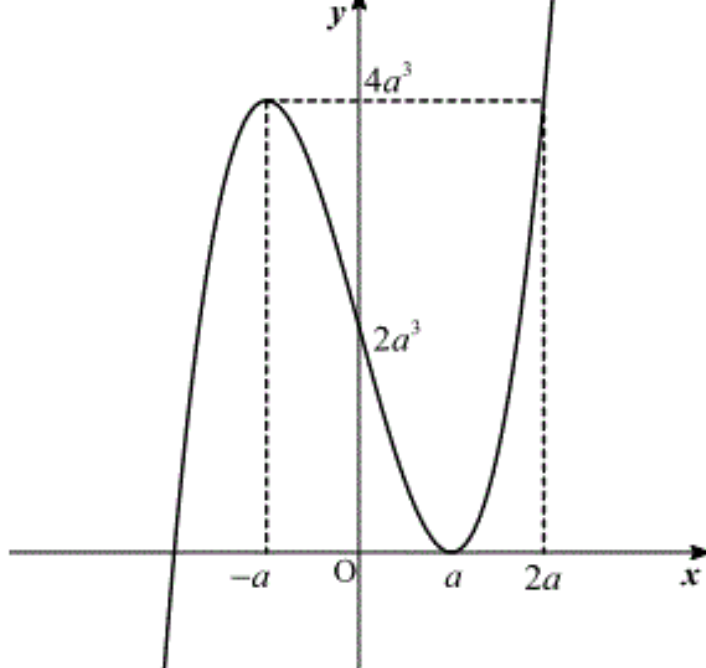
x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

上表より、 $f(x)$ は $x = a$ のとき極小値 $m_1 = f(a) = 0$ をとり、 $x = -a$ のとき極大値

$m_2 = f(-a) = 4a^3$ をとる。

(答) 極小値： $x = a$ のとき $m_1 = 0$ 、極大値： $x = -a$ のとき $m_2 = 4a^3$

(2)



$f(x) = m_2$ となるのは、

$$x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 4a^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3a^2x - 2a^3 = 0$$

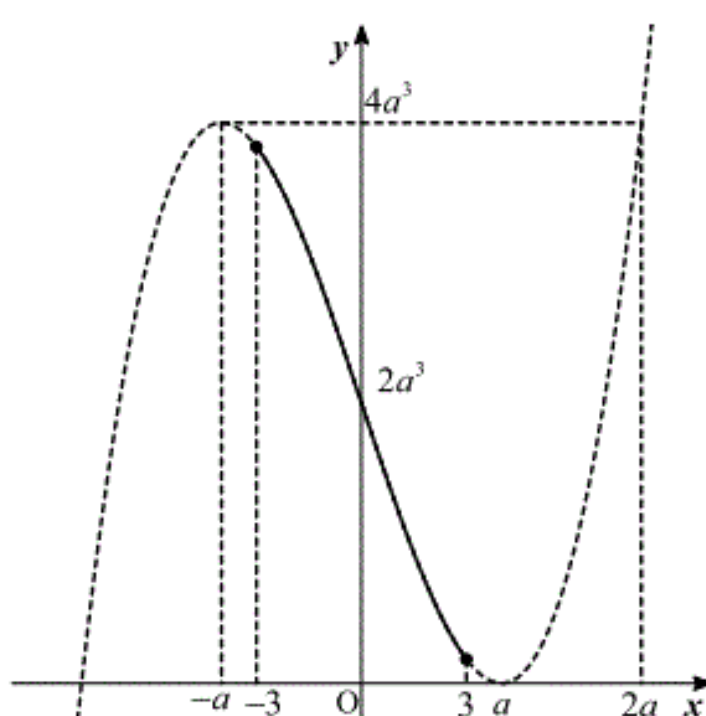
$$\Leftrightarrow (x+a)^2(x-2a) = 0$$

$$\therefore x = -a, 2a$$

より、 $x = -a, 2a$ のときである。以下 a の値により場合分けする。

[1] $a > 3$ のとき

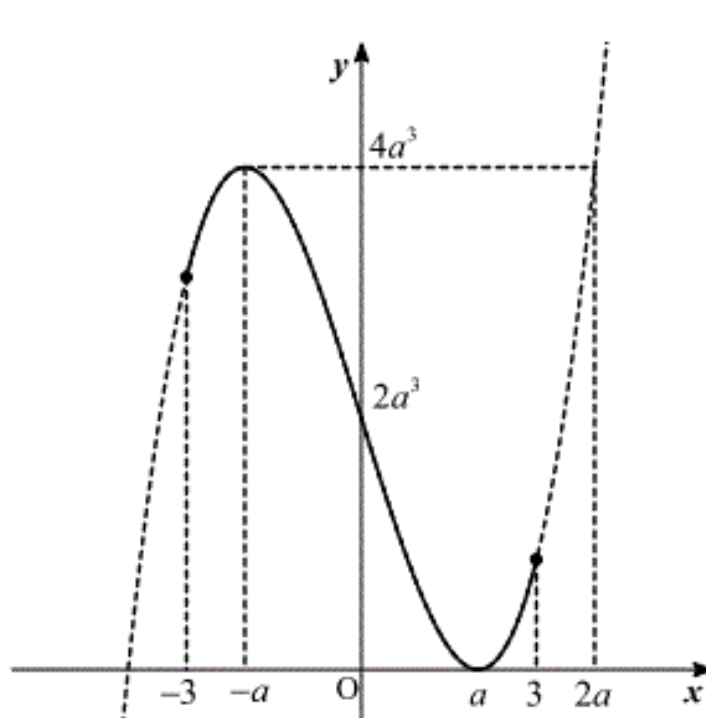
$-3 \leq x \leq 3$ の範囲での $y = f(x)$ のグラフは以下のようになる。



グラフより、 $M(a) = f(-3) < m_2$ となる。

[2] $\frac{3}{2} \leq a \leq 3$ のとき

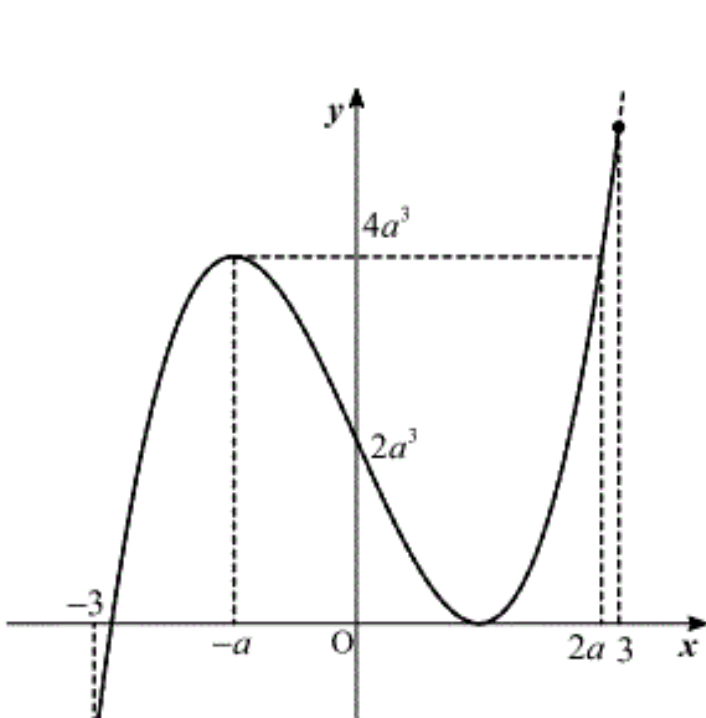
$-3 \leq x \leq 3$ の範囲での $y = f(x)$ のグラフは以下のようになる。



グラフより、 $M(a) = m_2$ となる。

[3] $0 < a < \frac{3}{2}$ のとき

$-3 \leq x \leq 3$ の範囲での $y = f(x)$ のグラフは以下のようになる。



グラフより、 $M(a) = f(3) > m_2$ となる。

以上[1], [2], [3]より、 $M(a) = m_2$ となる a の値の範囲は、 $\frac{3}{2} \leq a \leq 3$ である。

(答) $\frac{3}{2} \leq a \leq 3$

(3)

a の値で場合分けして考える。

[1] $a > 3$ のとき

(2)の過程より、

$$M(a) = f(-3) = 2a^3 + 9a^2 - 27$$

となる。 $2a^3, 9a^2$ ともに $a > 3$ において単調増加となるから、 $M(a)$ の値の範囲は

$$M(a) > 2 \cdot 3^3 + 9 \cdot 3^2 - 27 = 108$$

となる。

[2] $\frac{3}{2} \leq a \leq 3$ のとき

(2)の過程より、

$$M(a) = m_2 = 4a^3$$

となる。これは $\frac{3}{2} \leq a \leq 3$ において単調増加となるため、 $M(a)$ の値の範囲は、

$$M\left(\frac{3}{2}\right) \leq M(a) \leq M(3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{27}{2} \leq M(a) \leq 108$$

となる。

[3] $0 < a < \frac{3}{2}$ のとき

(2)の過程より

$$M(a) = f(3) = 2a^3 - 9a^2 + 27$$

となる。これを微分すると、

$$M'(a) = 6a^2 - 18a = 6a(a-3)$$

となる。 $0 < a < \frac{3}{2}$ で $6a(a-3) < 0$ であるから、この範囲で $M(a)$ は単調減少となる。よつ

て $M(a)$ の範囲は、

$$2\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 9\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 27 < M(a) < 2 \cdot 0^3 - 9 \cdot 0^2 + 27$$

$$\Leftrightarrow \frac{27}{2} < M(a) < 27$$

となる。

以上、[1], [2], [3]より、 $M(a)$ は $a = \frac{3}{2}$ のとき最小値 $M\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{2}$ をとる。

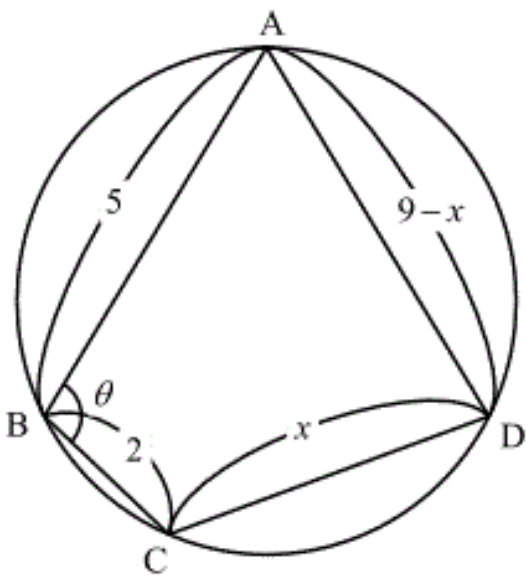
(答) $a = \frac{3}{2}$ のとき最小値 $M\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{2}$

3

(1)

問題不備により解答なし

(2)



$\angle ABC = \theta$ とする。四角形 $ABCD$ は円に内接するから $\angle ADC = 180^\circ - \theta$ となる。 $\triangle ABC$ において余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle ABC \\ &= 25 + 4 - 2 \cdot 5 \cdot 2 \cos \theta \\ &= 29 - 20 \cos \theta \end{aligned}$$

となる。 $AD = 9 - x$ であるから、 $\triangle ADC$ において余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cos \angle ADC \\ \Leftrightarrow 29 - 20 \cos \theta &= (9 - x)^2 + x^2 - 2(9 - x)x \cos(180^\circ - \theta) \\ \Leftrightarrow (x^2 - 9x - 10) \cos \theta &= x^2 - 9x + 26 \end{aligned}$$

となる。ここで $CD + DA = 9$ より $0 < x < 9$ となるため、この範囲において

$$x^2 - 9x - 10 = (x - 10)(x + 1) < 0$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} (x^2 - 9x - 10) \cos \theta &= x^2 - 9x + 26 \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= \frac{x^2 - 9x + 26}{x^2 - 9x - 10} \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= 1 + \frac{36}{x^2 - 9x - 10} \end{aligned}$$

となる。また $x^2 - 9x - 10 < 0$ より常に $1 + \frac{36}{x^2 - 9x - 10} < 1$ である。よって $\cos \theta > -1$ の条件を考

えることによって、

$$\begin{aligned} \cos \theta &> -1 \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{36}{x^2 - 9x - 10} &> -1 \\ \Leftrightarrow 2(x^2 - 9x - 10) &< -36 \quad (\because x^2 - 9x - 10 < 0) \\ \Leftrightarrow x^2 - 9x + 8 &< 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1)(x - 8) &< 0 \\ \Leftrightarrow 1 &< x < 8 \end{aligned}$$

が得られる。

(答) $1 < x < 8$

(3)

$x^2 - 9x - 10 < 0$ をふまえて、四角形 $ABCD$ の面積は、

$$\begin{aligned} \triangle ABC + \triangle ACD &= \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin \theta + \frac{1}{2} AD \cdot DC \sin(180^\circ - \theta) \\ &= \frac{5 \cdot 2}{2} \sin \theta + \frac{(9 - x)x}{2} \sin \theta \\ &= -\frac{1}{2} (x^2 - 9x - 10) \sin \theta \\ &= -\frac{1}{2} (x^2 - 9x - 10) \sqrt{1 - \left(1 + \frac{36}{x^2 - 9x - 10}\right)^2} \\ &= -\frac{1}{2} (x^2 - 9x - 10) \sqrt{\left(2 + \frac{36}{x^2 - 9x - 10}\right) \cdot \left(-\frac{36}{x^2 - 9x - 10}\right)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\{-2(x^2 - 9x - 10) - 36\} \cdot 36} \\ &= 3\sqrt{2} \sqrt{-(x^2 - 9x + 8)} \\ &= 3\sqrt{2} \sqrt{-\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{49}{4}} \end{aligned}$$

となる。 $x = \frac{9}{2}$ は $1 < x < 8$ の範囲にあるため、四角形 $ABCD$ の面積は $x = \frac{9}{2}$ のとき最大値

$\frac{21\sqrt{2}}{2}$ をとる。

(答) $x = \frac{9}{2}$ のとき最大値 $\frac{21\sqrt{2}}{2}$