

1

〔解答〕

(1)	ア	0 または $\frac{1}{2}$	イ	0	ウ	0		
(2)	エ	48	オ	72				
(3)	カ	$-\frac{1}{2}$	キ	0	ク	$\frac{1}{3}$	ケ	0

〔解説〕

(1) $t=3^x$ とおくと、 $t>0$ である。このとき関数 $f(x)=27^x-9^x-3^{x+1}+3$ は、

$$\begin{aligned} 3^{3x}-3^{2x}-3\cdot 3^x+3 &=t^3-t^2-3t+3 \\ &=t^2(t-1)-3(t-1) \\ &=(t-1)(t+\sqrt{3})(t-\sqrt{3}) \end{aligned}$$

と変形できる。よって $f(x)=0$ となるのは

$$\begin{aligned} (t-1)(t+\sqrt{3})(t-\sqrt{3}) &=0 \\ \Leftrightarrow t=1 \text{ または } \pm\sqrt{3} \\ \therefore x=0 \text{ または } \frac{1}{2} \end{aligned}$$

のときである。また $f(-x)$ を t を用いて表すと、

$$27^{-x}-9^{-x}-3^{-x+1}+3=\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t^2}-\frac{3}{t}+3$$

となるため、 $g(x)$ は t を用いて、

$$\begin{aligned} t^3-t^2-3t-\frac{3}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}+6 &=\left(t+\frac{1}{t}\right)^3-3t-\frac{3}{t}-\left(t+\frac{1}{t}\right)^2+2-3t-\frac{3}{t}+6 \\ &=\left(t+\frac{1}{t}\right)^3-\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-6\left(t+\frac{1}{t}\right)+8 \end{aligned}$$

と表せる。ここで $k=t+\frac{1}{t}$ とおくと、 $t>0, \frac{1}{t}>0$ であるから、相加相乗平均の関係を用いると、

$$k=t+\frac{1}{t}\geq 2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}=2 \quad (\text{等号成立は } t=\frac{1}{t}, \text{ つまり } t=1 \text{ のとき確かに成立する})$$

である。 $h(k)=k^3-k^2-6k+8$ とおくと、

$$\begin{aligned} h'(k) &=3k^2-2k-6 \\ &=3\left(k-\frac{1+\sqrt{19}}{3}\right)\left(k+\frac{1-\sqrt{19}}{3}\right) \end{aligned}$$

である。ここで、 $\frac{1\pm\sqrt{19}}{3}<2$ であることより、 $k\geq 2$ の範囲では $h(k)$ は単調増加である。よって、 $g(x)$ は $k=2$ すなわち $t=1, x=0$ のとき最小値 $g(0)=0$ をとる。

(2) $G, L>0$ のもとで与えられた関係式を整理することで

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 2\log_3 L-\log_3 G=3+5\log_3 2 \\ \log_2 L+\log_2 G=7+3\log_2 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \frac{L^2}{G}=2^5\cdot 3^3 \\ LG=2^7\cdot 3^3 \end{cases} \\ \therefore &L=2^4\cdot 3^2, G=2^3\cdot 3 \end{aligned}$$

が得られる。ここで、互いに素である自然数 m', n' を用いて $m=m'G, n=n'G$ とおくと、 $L=m'n'G$ であるから、

$$\begin{aligned} m'n' &=2^{4\cdot 3}\cdot 3^{2\cdot 1} \\ &=6 \end{aligned}$$

が成立する。ここで、 $G>0$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned} G &<m<n<L \\ \Leftrightarrow G &<m'G<n'G<6G \\ \Leftrightarrow 1 &<m'<n'<6 \end{aligned}$$

である。 m', n' が互いに素であることに注意すれば、これを満たす自然数 (m', n') の組は $(m', n')=(2, 3)$ のみであると分かる。以上より、

$$\begin{aligned} (m, n) &=(2G, 3G) \\ \therefore (m, n) &=(48, 72) \end{aligned}$$

となる。

(3) 直線 $l:y=ax+b$ 上の任意の点 $(t, at+b)$ に対して $(5t+6(at+b), t+4(at+b))$ も l 上の点である。すなわち

$$\begin{aligned} t+4(at+b) &=a\{5t+6(at+b)\}+b \\ \Leftrightarrow t(1-a-6a^2) &+3b-6ab=0 \end{aligned}$$

が t についての恒等式となる。これが恒等式であるための必要十分条件は、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 1-a-6a^2=0 \\ 3b-6ab=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow (a, b) &=\left(\frac{1}{3}, 0\right), \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \end{aligned}$$

である。

2

【解答】

(1) $\frac{1}{27}$ 倍

(2) $\frac{1}{2}$ 倍

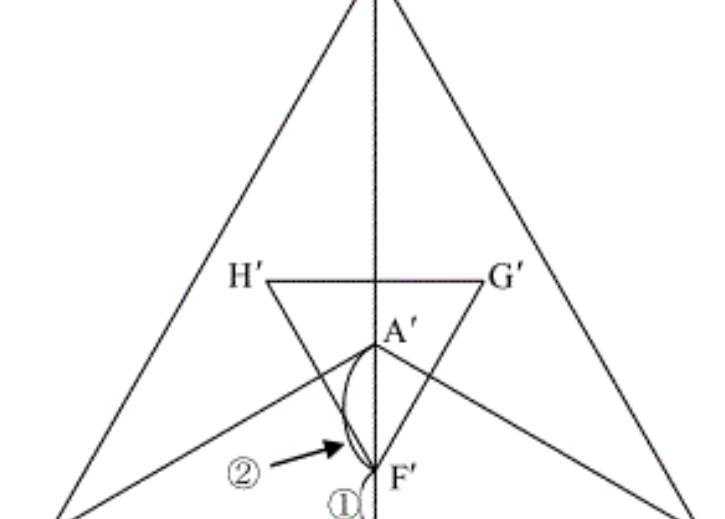
(3) $\frac{1}{9}$ 倍

(4) $\frac{7}{27}$ 倍

【解説】

(1)

$\triangle BCD$ を含む平面を基準としたとき、 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ACD$ 、 $\triangle ABD$ の重心の高さは同じであるため、 $\triangle FGH$ を含む平面と $\triangle BCD$ を含む平面は平行に位置している。また、正四面体 $ABCD$ を上から見たときの図は以下の通りである。点 A' 、 F' 、 G' 、 H' はそれぞれ元の点から平面 BCD に下ろした垂線の足である。また、対称性より、 $\triangle BCD$ と $\triangle F'G'H'$ の重心は一致している。



図より、線分 $A'F'$ の長さは辺 CD を底辺として見たときの $\triangle BCD$ の高さの

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

倍に相当し、辺 $H'G'$ を底辺として見たときの $\triangle F'G'H'$ の高さの $\frac{2}{3}$ 倍に相当するから、

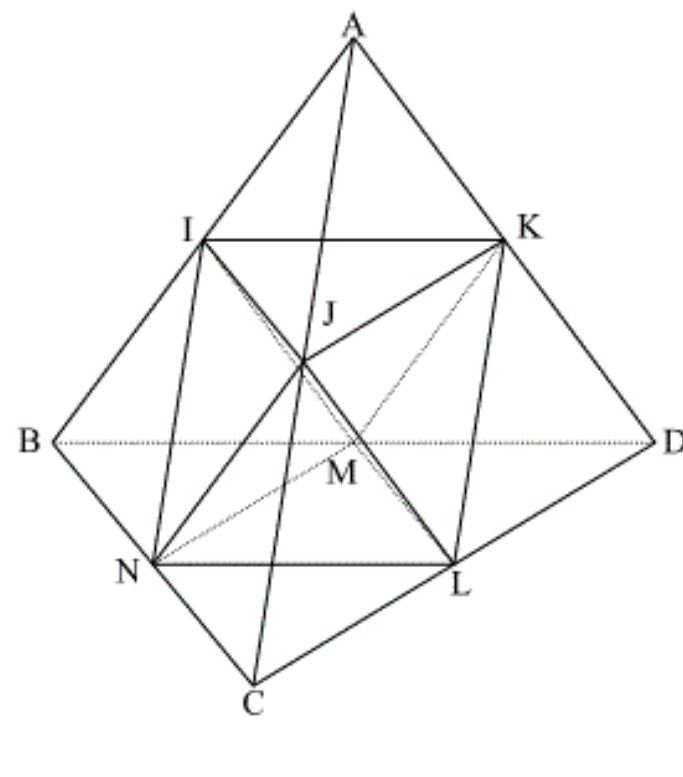
$$\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 3 : 1$$

より、 $\triangle BCD$ と $\triangle FGH$ の相似比は $3 : 1$ である。これより、正四面体 $ABCD$ と正四面体 $EFGH$ の体積比は

$$3^3 : 1^3 = 27 : 1$$

である。よって、正四面体 $EFGH$ の体積は正四面体 $ABCD$ の体積の $\frac{1}{27}$ 倍である。

(2)



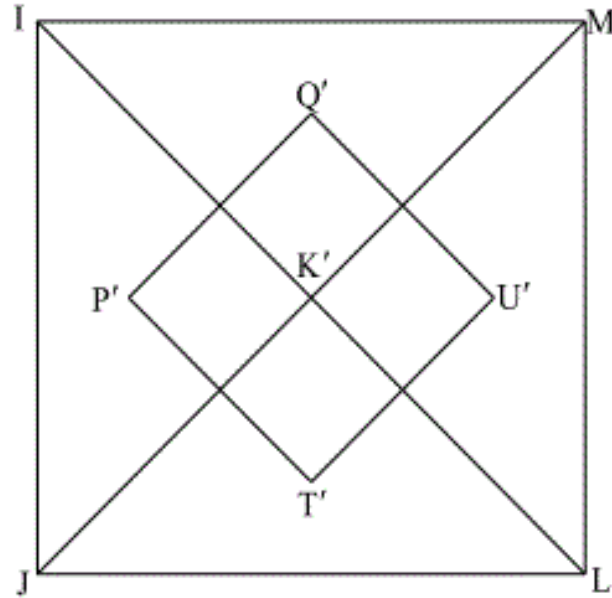
上図のように正八面体 $IJKLMN$ は正四面体 $ABCD$ からその各辺の長さが半分の正四面体を各頂点から取り除いたものとなっている。よって正八面体の体積は正四面体 $ABCD$ に対して、

$$1 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$$

倍となっている。

(3)

点 K 側から面 $IJLM$ に向かって垂直にこの正八面体および立方体を見たときの図は以下の通りとなる。点 K' 、 P' 、 Q' 、 T' 、 U' はそれぞれ元の点から平面 $IJLM$ に下ろした垂線の足である。



点 K' から辺 JL に下ろした垂線の長さは、正方形 $IMLJ$ の一辺の長さの $\frac{1}{2}$ 倍である。また、 P' 、 Q' 、 T' 、 U' はそれぞれ三角形の重心であるため、線分 $K'T'$ の長さは、点 K' から辺 JL に下ろした垂線の長さの $\frac{2}{3}$ 倍である。更に、正方形 $P'Q'T'U'$ の一辺の長さは線分 $K'T'$ の長さの $\sqrt{2}$ 倍である。以上より、正方形 $P'Q'T'U'$ の一辺の長さは正方形 $IMLJ$ の一辺の長さに対して、

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

倍となっている。よって、立方体 $PQRS-TUVW$ の体積は正八面体 $IJKLMN$ の、

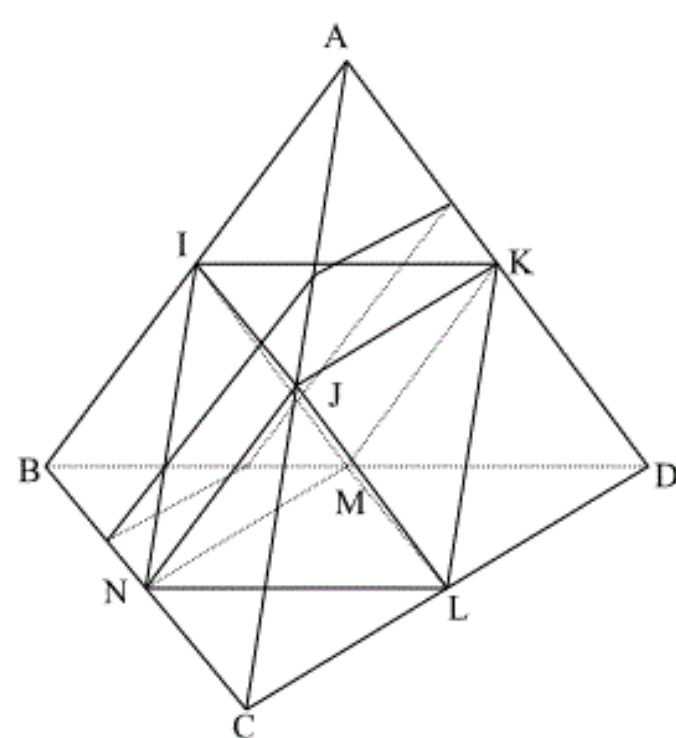
$$\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^3}{1 \times 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{3} \times 2} = \frac{2}{9}$$

倍である。以上より、立方体 $PQRS-TUVW$ の体積は正四面体 $ABCD$ の体積の

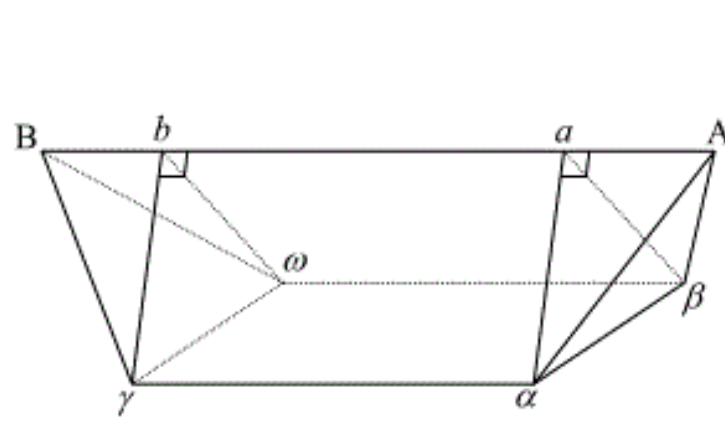
$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$$

倍である。

(4)



点 P 、 Q 、 R 、 S を含む平面と辺 AC 、 AD 、 BC 、 BD との交点をそれぞれ α 、 β 、 γ 、 ω とする。この平面によって切り取られた立体のうち、頂点 A 、 B を含む側の立体の概形は以下のようになる。



直線 $\alpha\gamma$ は $\triangle INJ$ の重心 S を通るため、 $A\alpha : \alpha J = 2 : 1$ となる。よって、

$$AB : \alpha\gamma = 3 : 2$$

となる。また、点 a 、 α 、 β を含む平面および点 b 、 γ 、 ω を含む平面が辺 AB と垂直に交わるように点 a 、 b を辺 AB 上に取ると、

$$AB : Aa : bB = 6 : 1 : 1$$

である。このとき、三角錐 $A-a\alpha\beta$ と三角錐 $A-ICD$ は相似であり、その相似比は

$$\frac{1}{6} : \frac{1}{2} = 1 : 3$$

である。これより、三角錐 $A-a\alpha\beta$ の体積は正四面体 $ABCD$ の体積の、

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{54}$$

倍である。また、 $Aa : ab = 1 : 4$ であり、三角錐の体積は底面積と高さが等しい三角柱の $\frac{1}{3}$ 倍となることから、三角柱 $a\alpha\beta-b\gamma\omega$ の体積は三角錐 $A-a\beta\omega$ の体積に対して、 $4 \times 3 = 12$ 倍となる。したがって、三角柱 $a\alpha\beta-b\gamma\omega$ の体積は正四面体 $ABCD$ に対して

$$12 \cdot \frac{1}{54} = \frac{2}{9}$$

倍である。以上より、4 点 P 、 Q 、 R 、 S を通る平面によって正四面体 $ABCD$ を切り分けたとき、頂点 A 、 B を含む側の体積は正四面体 $ABCD$ の体積の

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{54} \times 2 = \frac{7}{27}$$

倍である。

(1)

$$\begin{cases} ab=6 & \dots\dots ① \\ a+b-c^2=1 & \dots\dots ② \\ c(a-b)=2 & \dots\dots ③ \end{cases}$$

①より、 a, b はいずれも正の数であるか、あるいはいずれも負の数である。②より $a+b=c^2+1>0$ であるから、 a, b はいずれも正の数であると分かる。

(答) $a:+, b:+$

(2)

$c=0$ は③の式に矛盾するから、 $c \neq 0$ である。②より、 $a+b=c^2+1$ となり、また③より、 $a-b=\frac{2}{c}$ となる。これらを連立すると、

$$\begin{cases} a=\frac{c^2}{2}+\frac{1}{c}+\frac{1}{2} \\ b=\frac{c^2}{2}-\frac{1}{c}+\frac{1}{2} \end{cases} \dots\dots ④$$

が得られる。ここで、 $c \neq 0$ より $x \neq 0$ であることに注意したうえでこれらを①に代入することで、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{c^2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{c^2}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{c}\right)=6 \\ & \Leftrightarrow \left(\frac{c^2}{2}+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{c}\right)^2 = 6 \\ & \Leftrightarrow \frac{c^4}{4} + \frac{c^2}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{c^2} = 6 \\ & \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 23x - 4 = 0 \end{aligned}$$

が得られる。よって $f(x)=x^3+2x^2-23x-4$ となる。

(答) $f(x)=x^3+2x^2-23x-4$

(3)

$f(x)$ を因数分解すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 2x^2 - 23x - 4 \\ &= (x-4)(x^2+6x+1) \\ &= (x-4)\left\{x-(-3-2\sqrt{2})\right\}\left\{x-(-3+2\sqrt{2})\right\} \end{aligned}$$

であるから、 $f(x)=0$ の解は

$$x=4, -3 \pm 2\sqrt{2}$$

となる。このうち正の実数解は $x=4$ のみである。

(答) 1個

(4)

(3)の答より、 $x=c^2=4$ であるため、 $c=\pm 2$ である。よってこれを④に代入することで、

$$(a, b, c) = (3, 2, 2), (2, 3, -2)$$

が得られる。これらはそれぞれ、①を満たす。

(答) $(a, b, c) = (3, 2, 2), (2, 3, -2)$