

1

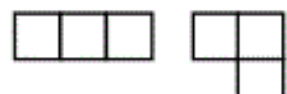
〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ
	2	5	12
(2)	エ	オ	
	35	11	

〔解説〕

(1)

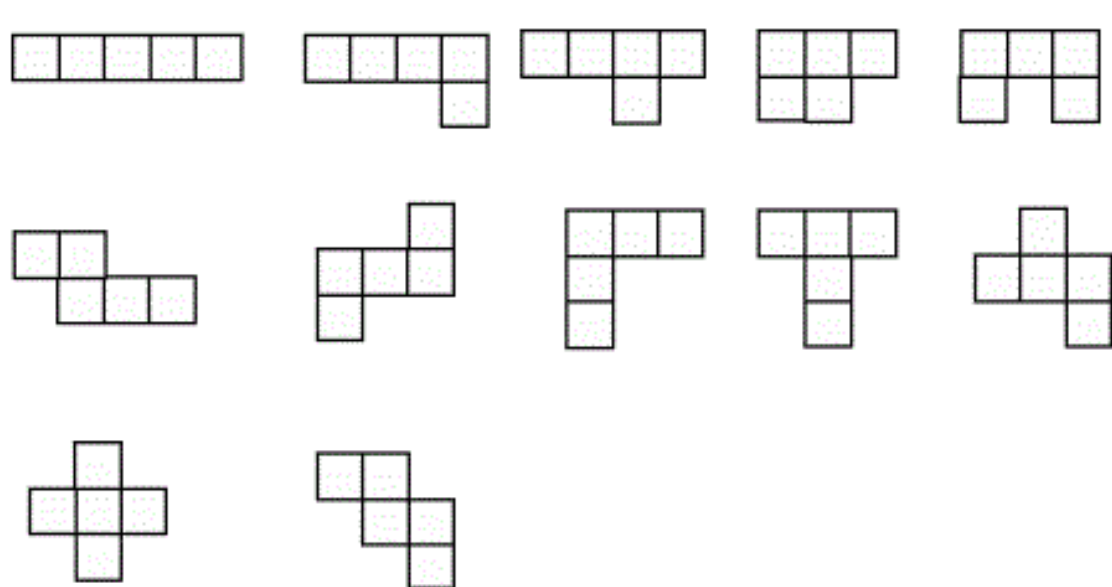
$n=3$ のとき以下の2通り存在する。



$n=4$ のとき以下の5通り存在する。

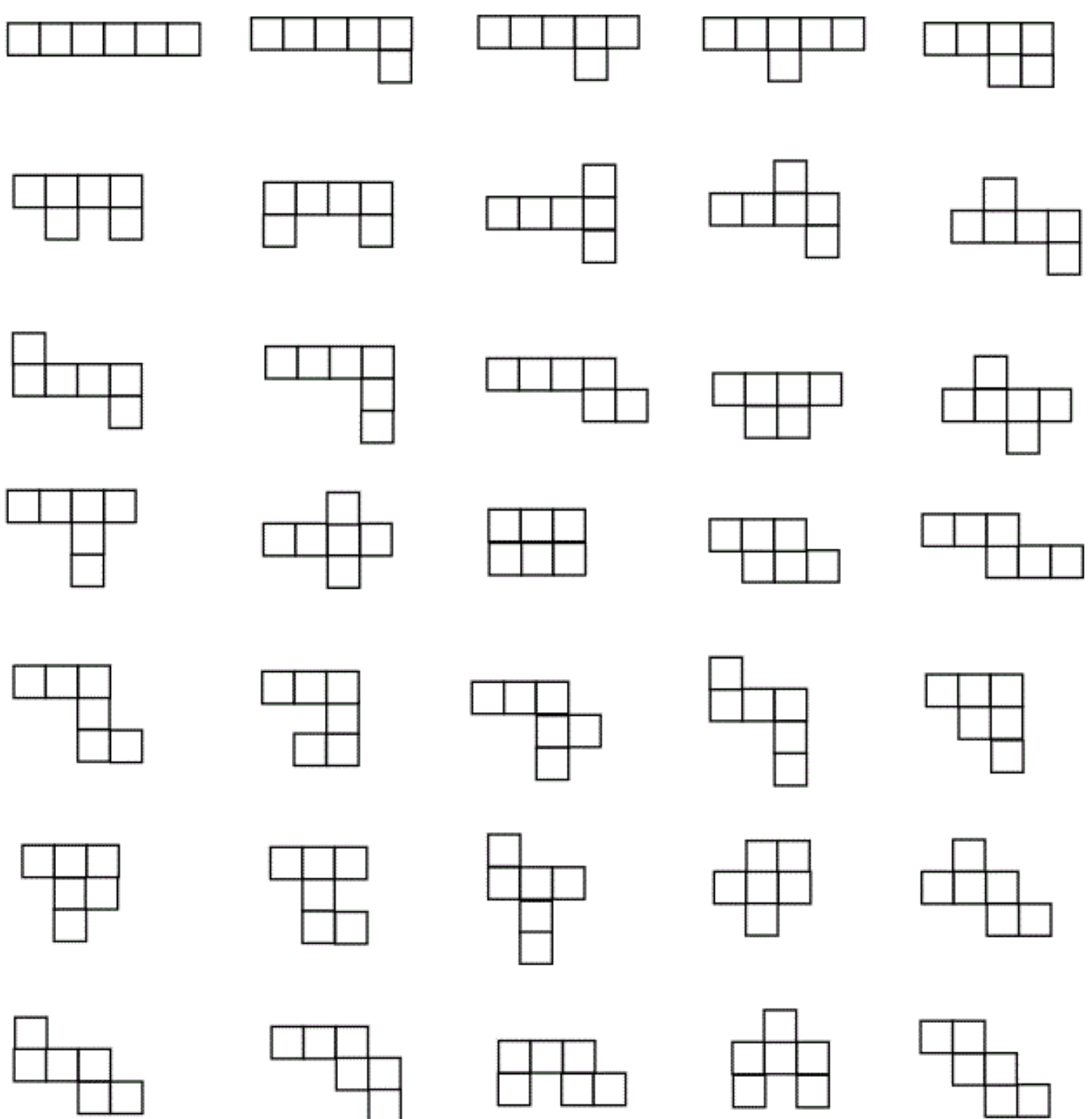


$n=5$ のとき以下の12通り存在する。

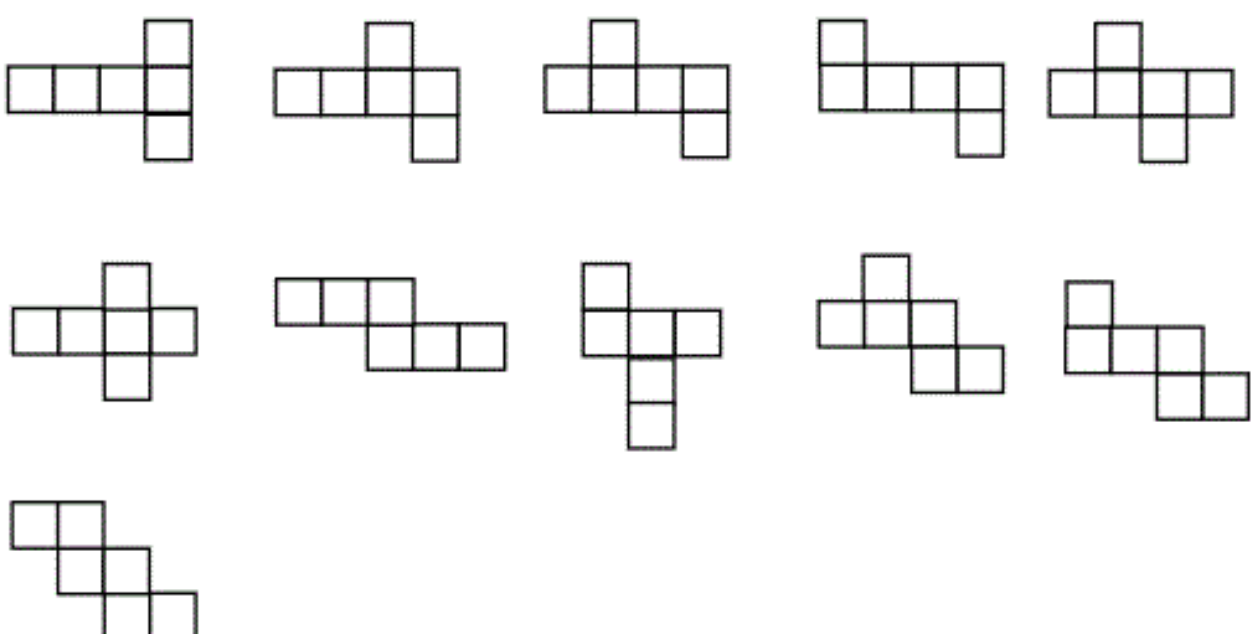


(2)

$n=6$ のとき実際に数えると以下の35通り存在する。



このうち立方体の展開図になるものは以下の11種類である。



(1)

$$\begin{aligned}
 f(\theta) &= -2\sin 3\theta + 9\cos 2\theta - 18\sin \theta - 9 \\
 &= -2(3\sin \theta - 4\sin^3 \theta) + 9(1 - 2\sin^2 \theta) - 18\sin \theta - 9 \\
 &= 8\sin^3 \theta - 18\sin^2 \theta - 24\sin \theta
 \end{aligned}$$

となるから、 $x = \sin \theta$ とおけば、

$$f(\theta) = 8x^3 - 18x^2 - 24x$$

である。

$$(\text{答}) \quad f(\theta) = 8x^3 - 18x^2 - 24x$$

(2)

$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ であり $x = \sin \theta$ であるから $-1 \leq x \leq 1$ である。また、

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= 24x^2 - 36x - 24 \\
 &= 12(2x^2 - 3x - 2) \\
 &= 12(2x+1)(x-2)
 \end{aligned}$$

であるから $g(x)$ の $-1 \leq x \leq 1$ における増減は以下の表のようになる。

x	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$g'(x)$	$\nearrow$	$+$	0	$-$	$\searrow$
$g(x)$	-2	$\nearrow$	$\frac{13}{2}$	$\searrow$	-34

したがって $g(x)$ は $x = -\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{13}{2}$ をとる。このとき $f(\theta)$ も最大値 $\frac{13}{2}$ をとり、その θ の

値は $x = \sin \theta$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) より、

$$\sin \theta = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$$

である。また、 $g(x)$ は $x = 1$ で最小値 -34 をとる。このとき $f(\theta)$ も最小値 -34 をとり、その θ

の値は $x = \sin \theta$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) より、

$$\sin \theta = 1 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

である。

$$\theta = -\frac{\pi}{6} \text{ のとき最大値 } \frac{13}{2}$$

(答)

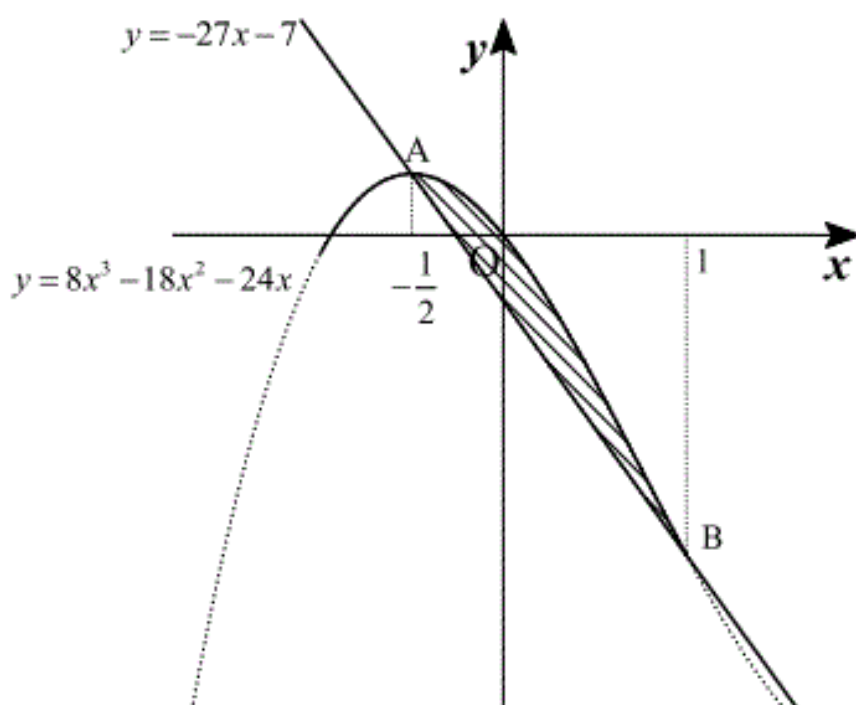
$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ のとき最小値 } -34$$

(3)

(2)の結果より $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{13}{2}\right)$, $B(1, -34)$ であるから直線 AB の方程式は、

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{-34 - \frac{13}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}(x - 1) - 34 \\
 &\Leftrightarrow y = -27x - 7
 \end{aligned}$$

である。よって $y = g(x)$ と $y = -27x - 7$ のグラフを図示すると以下のようになる。



したがって求める面積を S とすると S は上図の斜線部の面積であるから、

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-\frac{1}{2}}^1 \{8x^3 - 18x^2 - 24x - (-27x - 7)\} dx \\
 &= \int_{-\frac{1}{2}}^1 (8x^3 - 18x^2 + 3x + 7) dx \\
 &= \left[2x^4 - 6x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 7x \right]_{-\frac{1}{2}}^1 \\
 &= 2\left(1 - \frac{1}{16}\right) - 6\left(1 + \frac{1}{8}\right) + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) + 7\left(1 + \frac{1}{2}\right) \\
 &= \frac{27}{4}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{27}{4}$$

(1)

 $a_4 = 15$ より

$$a + 3d = 15 \Leftrightarrow a = 15 - 3d \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また $S_{10} > 0, S_{11} \leq 0$ より

$$\frac{(a + a + 9d) \cdot 10}{2} > 0 \Leftrightarrow 20a + 90d > 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\frac{(a + a + 10d) \cdot 11}{2} \leq 0 \Leftrightarrow 22a + 110d \leq 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。②、③に①を代入して整理すると

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow 20(15 - 3d) + 90d > 0 \Leftrightarrow d > -10$$

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow 22(15 - 3d) + 110d \leq 0 \Leftrightarrow d \leq -\frac{15}{2}$$

となるから求める d の値の範囲は $-10 < d \leq -\frac{15}{2}$ である。

$$(\text{答}) \quad -10 < d \leq -\frac{15}{2}$$

(2)

数列 $\{a_n\}$ は初項 a 、公差 d の等差数列であるからその一般項 a_n は

$$a_n = a + (n-1)d$$

と表せる。これに①を代入して

$$a_n = 15 - 3d + (n-1)d = 15 + (n-4)d$$

となる。 $n > 4$ のとき $n-4 > 0$ であるから(1)の結果と合わせると

$$-10(n-4) < (n-4)d \leq -\frac{15}{2}(n-4)$$

$$\Leftrightarrow 15 - 10(n-4) < 15 + (n-4)d \leq 15 - \frac{15}{2}(n-4)$$

$$\Leftrightarrow 55 - 10n < a_n \leq 45 - \frac{15}{2}n$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 55 - 10n < a_n \leq 45 - \frac{15}{2}n$$

(3)

(2)で得られた結果に $n = 5, 6$ を代入すると

$$5 < a_5 \leq \frac{15}{2}$$

$$-5 < a_6 \leq 0$$

となる。ここで $a_6 = 0$ となるのは

$$a + 5d = 0$$

$$\Leftrightarrow 15 - 3d + 5d = 0$$

$$\therefore d = -\frac{15}{2}$$

のときである。したがって $a_n > 0$ のとき $S_{n-1} < S_n$ であることに注意すると

$$[1] \quad d = -\frac{15}{2} \text{ のとき}$$

$$S_1 < S_2 < \dots < S_5 = S_6 > S_7 > \dots$$

となるから S_n を最大にする n は $n = 5, 6$ である。このとき

$$S_5 = S_6 = \frac{(a + a + 4d) \cdot 5}{2} = 75 - 5d$$

である。

$$[2] \quad -10 < d < -\frac{15}{2} \text{ のとき}$$

$$S_1 < S_2 < \dots < S_5 > S_6 > \dots$$

となるから S_n を最大にする n は $n = 5$ である。このとき

$$S_5 = \frac{(a + a + 4d) \cdot 5}{2} = 75 - 5d$$

である。

$$d = -\frac{15}{2} \text{ では } n = 5, 6 \text{ のとき最大値 } 75 - 5d$$

(答)

$$-10 < d < -\frac{15}{2} \text{ では } n = 5 \text{ のとき最大値 } 75 - 5d$$