

【解答】

(1)	ア	$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$	(2)	イ	945	ウ	166
(3)	エ	$\frac{k^2(k^2+2)}{3}$	(4)	オ	1956		

【解説】

(1)
与えられた数列 $\{a_n\}$ について、第 k 群では項数 k 、公差 k の等差数列となっている。また、第 $k-1$ 群の末項と第 k 群の初項の差は k である。これらより、第 i 群 (i は自然数とする) の末項の数を b_i と表すことにすると、 $i \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} b_i &= b_{i-1} + (i-1)i + i \\ &= b_{i-1} + i^2 \end{aligned}$$

となる。 $b_1 = a_1 = 1$ であるから、これより、第 k 群の末項 b_k は、 $k \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} b_k &= 1 + \sum_{i=2}^k i^2 \\ &= \sum_{i=1}^k i^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \end{aligned}$$

である。これは $k=1$ のときにも成り立つ。

(2)
 $100 = 1 + 2 + \cdots + 13 + 9$
より、 a_{100} は第 14 群の 9 番目の項である。 a_{91} から a_{100} までの項の差はすべて 14 であるから、求める値は

$$\begin{aligned} a_{100} &= b_{13} + 14 \cdot (100 - 91) \quad (\because a_{91} = b_{13}) \\ &= \frac{13 \cdot 14 \cdot 27}{6} + 14 \cdot 9 \\ &= 819 + 126 \\ &= 945 \end{aligned}$$

となる。また、(1) の結果より、

$$\begin{aligned} b_{17} &= \frac{17 \cdot 18 \cdot 35}{6} = 1785 \\ b_{18} &= \frac{18 \cdot 19 \cdot 37}{6} = 2109 \end{aligned}$$

より、 $a_n < 2020$ を満たす最大の n は第 18 群の数である。さらに、

$$\begin{aligned} 1785 + 18 \cdot 13 &= 2019 < 2020 \\ 1785 + 18 \cdot 14 &= 2037 > 2020 \end{aligned}$$

より、第 18 項の 13 番目の項まで $a_n < 2020$ を満たす。以上より、条件を満たす最大の n は

$$\begin{aligned} &1 + 2 + \cdots + 17 + 13 \\ &= \frac{17 \cdot 18}{2} + 13 \\ &= 153 + 13 \\ &= 166 \end{aligned}$$

である。

(3)
第 k 群の l 番目 ($l = 1, 2, \dots, k$) の数は

$$b_{k-1} + kl$$

と表される。これより、(1) の結果を利用すると、求める値は

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^k (b_{k-1} + kl) &= kb_{k-1} + k \sum_{l=1}^k l \\ &= \frac{k^2(k-1)(2k-1)}{6} + \frac{k^2(k+1)}{2} \\ &= \frac{k^2\{(k-1)(2k-1) + 3(k+1)\}}{6} \\ &= \frac{k^2(k^2+2)}{3} \end{aligned}$$

である。

(4)
 $30 = 1 + 2 + \cdots + 7 + 2$
より、 a_{30} は第 8 群の 2 番目の項である。 a_{28} から a_{30} までの項の差はいずれも 8 であるから、 a_{29} 、 a_{30} の値は

$$\begin{aligned} a_{29} &= b_7 + 8 \quad (\because a_{28} = b_7) \\ &= \frac{7 \cdot 8 \cdot 15}{6} + 8 \\ &= 148 \\ a_{30} &= a_{29} + 8 = 156 \end{aligned}$$

となる。(3) の結果を利用すると、求める値は

$$\begin{aligned} S_{30} &= \sum_{k=1}^7 \frac{k^2(k^2+2)}{3} + a_{29} + a_{30} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^7 k^4 + \frac{2}{3} \sum_{k=1}^7 k^2 + 148 + 156 \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^7 k^4 + \frac{2}{3} \cdot \frac{7 \cdot 8 \cdot 15}{6} + 304 \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^7 k^4 + \frac{1192}{3} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\sum_{k=1}^7 \{(k+1)^5 - k^5\} = \sum_{k=1}^7 (5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1)$$

が成り立つ。左辺について、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^7 \{(k+1)^5 - k^5\} &= (2^5 - 1^5) + (3^5 - 2^5) + \cdots + (8^5 - 7^5) \\ &= 8^5 - 1 \\ &= 32767 \end{aligned}$$

となる。一方、右辺について、

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^7 (5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) \\ &= 5 \sum_{k=1}^7 k^4 + 10 \sum_{k=1}^7 k^3 + 10 \sum_{k=1}^7 k^2 + 5 \sum_{k=1}^7 k + \sum_{k=1}^7 1 \\ &= 5 \sum_{k=1}^7 k^4 + 10 \cdot \frac{7^2 \cdot 8^2}{4} + 10 \cdot \frac{7 \cdot 8 \cdot 15}{6} + 5 \cdot \frac{7 \cdot 8}{2} + 7 \\ &= 5 \sum_{k=1}^7 k^4 + 7840 + 1400 + 140 + 7 \\ &= 5 \sum_{k=1}^7 k^4 + 9387 \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} 32767 &= 5 \sum_{k=1}^7 k^4 + 9387 \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^7 k^4 &= 4676 \end{aligned}$$

となる。これより、求める値は

$$S_{30} = \frac{4676}{3} + \frac{1192}{3} = 1956$$

である。

〔解答〕

$$(1) \quad \cos 3\theta = \boxed{4t^3 - 3t} \quad \cos 2\theta \cos 4\theta = \boxed{(2t^2 - 1)(8t^4 - 8t^2 + 1)} \quad f\left(\frac{\pi}{9}\right) = \boxed{\frac{1}{8}}$$

$$(2) \quad \text{組}(x, y) \text{の総数は} \boxed{27}$$

$$|-3x + 7y| \text{の最大値は} \boxed{1278} \quad \text{最小値は} \boxed{34}$$

〔解説〕

(1)

倍角の公式および三倍角の公式より、

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= 2\cos^2 \theta - 1 \\ \cos 3\theta &= 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta \\ \cos 4\theta &= 2\cos^2 2\theta - 1 \\ &= 2(2\cos^2 \theta - 1)^2 - 1 \\ &= 8\cos^4 \theta - 8\cos^2 \theta + 1 \end{aligned}$$

となる。これより、 $\cos 3\theta$ および $\cos 2\theta \cos 4\theta$ を t の式で表すと、

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= 4t^3 - 3t \\ \cos 2\theta \cos 4\theta &= (2t^2 - 1)(8t^4 - 8t^2 + 1) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\theta = \frac{\pi}{9}$ が成り立つとき、

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= \cos \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow 4t^3 - 3t &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 8t^3 - 6t - 1 &= 0 \end{aligned}$$

となる。また、関数 $f(\theta) = \cos \theta \cos 2\theta \cos 4\theta$ を $t = \cos \theta$ の式で表すと、

$$\begin{aligned} f(\theta) &= t(2t^2 - 1)(8t^4 - 8t^2 + 1) \\ &= 16t^7 - 24t^5 + 10t^3 - t \\ &= (8t^3 - 6t^2 - 1)\left(2t^4 - \frac{3}{2}t^3 + \frac{1}{4}t + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{8} \end{aligned}$$

となる。以上より、求める値は

$$f\left(\frac{\pi}{9}\right) = \frac{1}{8}$$

である。

(2)

$$\begin{aligned} 2020 &= 7 \cdot 288 + 4 \\ &= 7 \cdot 288 + (11 - 7) \\ &= 7 \cdot 287 + 11 \cdot 1 \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} (\star) &\Leftrightarrow 7x + 11y = 7 \cdot 287 + 11 \cdot 1 \\ &\Leftrightarrow 7(x - 287) = -11(y - 1) \end{aligned}$$

のように式を変形することができる。7 と 11 は互いに素であるから、整数 k を用いて、

$$\begin{cases} x - 287 = -11k \\ y - 1 = 7k \end{cases}$$

と置くことができる。これより、 $(\star)$ を満たす整数 x と y の組は、

$$(x, y) = (-11k + 287, 7k + 1) \quad \cdots \textcircled{1}$$

と表すことができる。 x と y がともに自然数である場合は、整数 k について、

$$\begin{aligned} -11k + 287 &\geq 1 \text{ かつ } 7k + 1 \geq 1 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq k \leq 26 \\ \therefore k &= 0, 1, 2, \dots, 25, 26 \end{aligned}$$

となる。 x と y がともに自然数となるような整数 k は全部で 27 個あるから、 $(\star)$ を満たす自然数 x と y の組は 27 組存在する。また、 $\textcircled{1}$ より、

$$\begin{aligned} |-3x + 7y| &= |-3(-11k + 287) + 7(7k + 1)| \\ &= |82k - 854| \end{aligned}$$

となる。これより、この問題では $k = 0, 1, 2, \dots, 25, 26$ における $a_k = |82k - 854|$ の最大値および最小値を考えればよい。 $82k - 854$ は k について単調増加であり、

$$\begin{aligned} k = 10 \text{ のとき } 82 \cdot 10 - 854 &= -34 \\ k = 11 \text{ のとき } 82 \cdot 11 - 854 &= 48 \end{aligned}$$

であるので、 $k \leq 10$ のとき、 $|82k - 854| = -(82k - 854)$ は単調減少であり、 $11 \leq k$ のとき $|82k - 854| = 82k - 854$ は単調増加である。よって、

$$a_0 > a_1 > \cdots > a_{10}, a_{11} < a_{12} < \cdots < a_{26}$$

が成立する。ゆえに、 $|82k - 854|$ が最大値をとり得るのは $k = 0$ あるいは $k = 26$ のときである。これら 2 つを計算して比較すると、

$$\begin{aligned} a_0 &= |82 \cdot 0 - 854| = 854, a_{26} = |82 \cdot 26 - 854| = 1278 \\ \therefore a_0 &< a_{26} \end{aligned}$$

より、 $|82k - 854|$ の最大値は

$$a_{26} = 1278$$

である。また、 $|82k - 854|$ が最小値をとり得るのは $k = 10$ あるいは $k = 11$ のときである。これら 2 つを計算して比較すると、

$$\begin{aligned} a_{10} &= |82 \cdot 10 - 854| = 34, a_{11} = |82 \cdot 11 - 854| = 48 \\ \therefore a_{10} &< a_{11} \end{aligned}$$

より、 $|82k - 854|$ の最小値は

$$a_{10} = 34$$

である。

(1)

10の素因数は2と5である。これより、2020!の末尾に並ぶ0の個数は、2020!を2で繰り返し割って割り切れる回数 N_2 と、2020!を5で繰り返し割って割り切れる回数 N_5 のうち少ない方と等しいといえる。正の実数 x に対し、 x の整数部分を $[x]$ で表すような記号を用いて N_2 、 N_5 をそれぞれ求めると、

$$\begin{aligned} N_2 &= \left[\frac{2020}{2} \right] + \left[\frac{2020}{2^2} \right] + \left[\frac{2020}{2^3} \right] + \left[\frac{2020}{2^4} \right] + \left[\frac{2020}{2^5} \right] \\ &\quad + \left[\frac{2020}{2^6} \right] + \left[\frac{2020}{2^7} \right] + \left[\frac{2020}{2^8} \right] + \left[\frac{2020}{2^9} \right] + \left[\frac{2020}{2^{10}} \right] \\ &= 1010 + 505 + 252 + 126 + 63 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 \\ &= 2013 \\ N_5 &= \left[\frac{2020}{5} \right] + \left[\frac{2020}{5^2} \right] + \left[\frac{2020}{5^3} \right] + \left[\frac{2020}{5^4} \right] \\ &= 404 + 80 + 16 + 3 \\ &= 503 \end{aligned}$$

となる。これらより、2020!の末尾に並ぶ0の個数は
503個

である。

(答) 503個

(2)

3^{2020} に対して常用対数をとると、

$$\begin{aligned} \log_{10} 3^{2020} &= 2020 \log_{10} 3 \\ &= 2020 \cdot 0.47712 \\ &= 963.7824 \end{aligned}$$

となる。これより、

$$\begin{aligned} 963 &< \log_{10} 3^{2020} < 964 \\ \Leftrightarrow 10^{963} &< 3^{2020} < 10^{964} \end{aligned}$$

となるから、 3^{2020} の桁数は

$$964 \text{ 桁}$$

である。また、

$$\begin{aligned} \log_{10} (6 \cdot 10^{963}) &= 963 + \log_{10} 2 + \log_{10} 3 \\ &= 963.77815 \\ \log_{10} (7 \cdot 10^{963}) &= 963 + \log_{10} 7 \\ &= 963.84510 \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \log_{10} (6 \cdot 10^{963}) &< \log_{10} 3^{2020} < \log_{10} (7 \cdot 10^{963}) \\ \Leftrightarrow 6 \cdot 10^{963} &< 3^{2020} < 7 \cdot 10^{963} \end{aligned}$$

となる。これより、 3^{2020} の先頭の数字は

$$6$$

である。

(答) 964桁, 6

(2)

3^{2020} の下3桁の数字を X とすると、これは、 3^{2020} を1000で割った余りに等しい。つまり、1000を法として、

$$\begin{aligned} X &\equiv 3^{2020} \\ &= 9^{1010} \end{aligned}$$

と書ける。ここで、二項定理より、1000を法として、

$$\begin{aligned} 9^{1010} &= (10-1)^{1010} \\ &= \sum_{k=0}^{1010} {}_{1010}C_k \cdot 10^k \cdot (-1)^{1010-k} \\ &= {}_{1010}C_0 - {}_{1010}C_1 \cdot 10 + {}_{1010}C_2 \cdot 10^2 + 10^3 \sum_{k=3}^{1010} {}_{1010}C_k \cdot 10^{k-3} \cdot (-1)^{1010-k} \\ &\equiv 1 - 1010 \cdot 10 + \frac{1010 \cdot 1009}{2} \cdot 100 \\ &\equiv 1 - 10 \cdot 10 + 10 \cdot 9 \cdot 50 \\ &= 4401 \\ &\equiv 401 \end{aligned}$$

となる。これより、 3^{2020} の下3桁は

$$X = 401$$

である。

(答) 401