

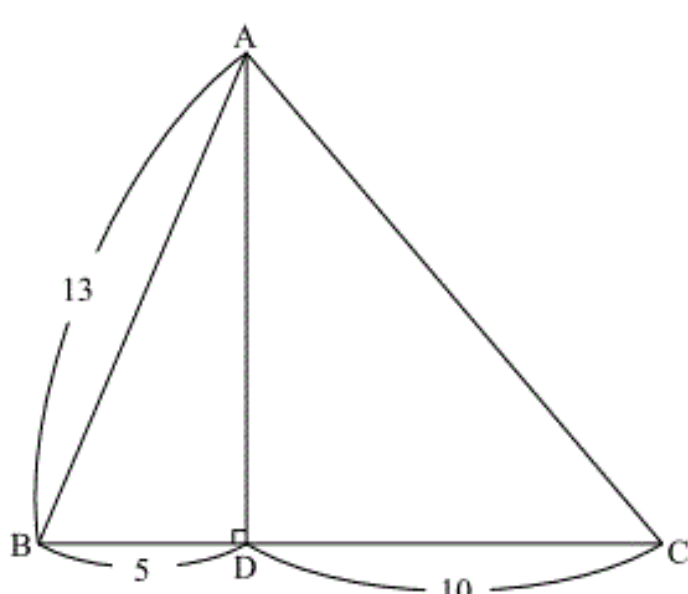
〔解答〕

(1)	ア	イ		
	12	$2\sqrt{61}$		
(2)	ウ	エ	オ	カ
	$\frac{65}{6}$	$\frac{75}{94}$	$\frac{47}{25}$	$\frac{5\sqrt{61}}{12}$

〔解説〕

(1)

下図において点Dは辺BCを1:2に内分するから、 $BD = \frac{1}{1+2}BC = 5$ となる。



よって三平方の定理より

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{AB^2 - BD^2} \\ &= \sqrt{13^2 - 5^2} \\ &= 12 \end{aligned}$$

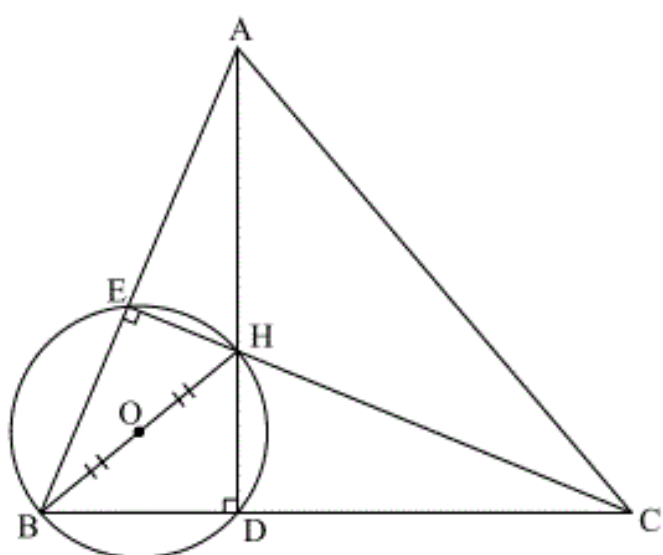
となる。さらに、

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{AD^2 + DC^2} \\ &= \sqrt{12^2 + 10^2} \\ &= 2\sqrt{61} \end{aligned}$$

となる。

(2)

下図において△CHDと△CBEは相似であり、△CBEと△ABDは相似であるから、△CHDと△ABDも相似である。



よって

$$CH = CD \cdot \frac{AB}{AD} = 10 \cdot \frac{13}{12} = \frac{65}{6}$$

となる。同様にして

$$HD = CD \cdot \frac{BD}{AD} = 10 \cdot \frac{5}{12} = \frac{25}{6}$$

であるから、

$$\frac{AH}{DH} = \frac{AD - HD}{DH} = \frac{12 - \frac{25}{6}}{\frac{25}{6}} = \frac{47}{25}$$

となる。ここで△ABDと直線CEにメネラウスの定理を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{BE}{AE} \cdot \frac{DC}{BC} \cdot \frac{AH}{DH} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{BE}{AE} \cdot \frac{2}{1+2} \cdot \frac{47}{25} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{BE}{AE} &= \frac{75}{94} \end{aligned}$$

となる。さらに $\angle BDH = 90^\circ$ より、四角形BDHEの外接円の中心Oは線分BHの中点となるから、その円の半径は

$$\begin{aligned} BO &= \frac{1}{2}BH \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{BD^2 + HD^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{5^2 + \left(\frac{25}{6}\right)^2} \\ &= \frac{5\sqrt{61}}{12} \end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

(1)	感染者数	新規感染者数
	298 人	149 人
(2)	感染者数	新規感染者数
	123 人	55 人
(3)	感染者数	新規感染者数
	4 人	1 人

〔解説〕

調査 n 日目の新規感染者数, 感染者数をそれぞれ a_n, b_n とすると, 直近 4 日以内に新たに感染した人が感染者であるから, $b_{n+3} = a_{n+3} + a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$ が成立する。それぞれの問いの条件のもとで, 感染者数 b_{10} および新規感染者数 a_{10} を求めればよい。

(1)

直近 3 日以内に新たに感染した人から感染するから, $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$ となる。

$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2$ より,

$$\begin{aligned} a_4 &= a_3 + a_2 + a_1 \\ &= 2 + 1 + 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_5 &= a_4 + a_3 + a_2 \\ &= 4 + 2 + 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

となり, 同様の計算を繰り返すことで $a_6 = 13, a_7 = 24, a_8 = 44, a_9 = 81, a_{10} = 149$ と求められる。また, このとき

$$\begin{aligned} b_{10} &= a_{10} + a_9 + a_8 + a_7 \\ &= 149 + 81 + 44 + 24 \\ &= 298 \end{aligned}$$

となる。以上から, 調査 10 日目の感染者数は 298 人, 新規感染者数は 149 人である。

(2)

直近 2 日以内に新たに感染した人から感染するから, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ となる。 $a_1 = 1, a_2 = 1$ より,

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + a_1 \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= a_3 + a_2 \\ &= 2 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

となり, 同様の計算を繰り返すことで $a_5 = 5, a_6 = 8, a_7 = 13, a_8 = 21, a_9 = 34, a_{10} = 55$ と求められる。また, このとき

$$\begin{aligned} b_{10} &= a_{10} + a_9 + a_8 + a_7 \\ &= 55 + 34 + 21 + 13 \\ &= 123 \end{aligned}$$

となる。以上から, 調査 10 日目の感染者数は 123 人, 新規感染者数は 55 人である。

(3)

前日に新たに感染した人から感染するから, $a_{n+1} = a_n$ となる。 $a_1 = 1$ より,

$a_{10} = a_9 = a_8 = \cdots = a_1 = 1$ と求められる。また, このとき

$$\begin{aligned} b_{10} &= a_{10} + a_9 + a_8 + a_7 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

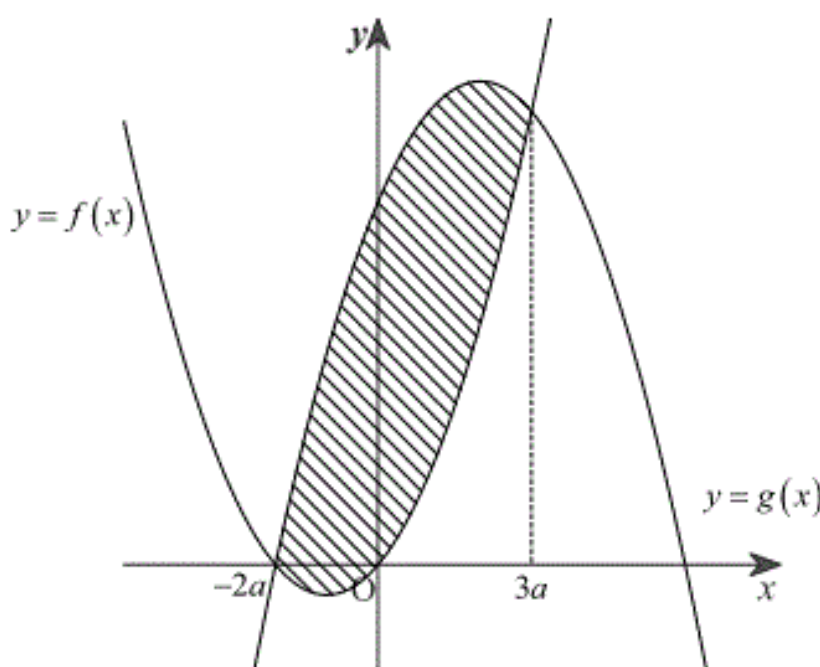
となる。以上から, 調査 10 日目の感染者数は 4 人, 新規感染者数は 1 人である。

(1)

$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの共有点の x 座標を求める。

$$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= (x^2+2ax)-(-x^2+4ax+12a^2) \\ &= 2x^2-2ax-12a^2 \\ &= 2(x+2a)(x-3a) \end{aligned}$$

より、 $f(x)=g(x)$ となるのは $x=-2a, 3a$ のときであり、 $a>0$ より $-2a \leq x \leq 3a$ のとき $f(x) \leq g(x)$ となるから、グラフは下図のようになる。



したがって、2つのグラフで囲まれた図形の面積は

$$\begin{aligned} \int_{-2a}^{3a} -2(x+2a)(x-3a)dx &= \frac{2}{6}\{3a-(-2a)\}^3 \\ &= \frac{125}{3}a^3 \end{aligned}$$

となる。この式の値が9となるのは $\frac{125}{3}a^3=9$ 、すなわち $a=\frac{3}{5}$ のときであり、これは $a>0$ を満たす。

(答) $a=\frac{3}{5}$

(2)

$2x-y=k$ とおく。これを y について解くと $y=2x-k$ より、点 (x, y) を通る傾きが2の直線の y 切片は $-k$ であるから、この y 切片が最小、最大となるとき、 $2x-y$ の値はそれぞれ最大、最小となる。 $y \geq f(x), y \leq g(x)$ を満たす点の集合は(1)の図の斜線部分であるから、特に直線 $y=2x-k$ との共有点がただ1つである場合を考えればよい。

$f'(x)=2x+2a, g'(x)=-2x+4a$ であり、 $f'(3a)=g'(-2a)=8a$ であるから、直線の傾き2と $8a$ との大小関係で場合分けをする。

[1] $8a < 2$ 、すなわち $(0 <) a < \frac{1}{4}$ のとき

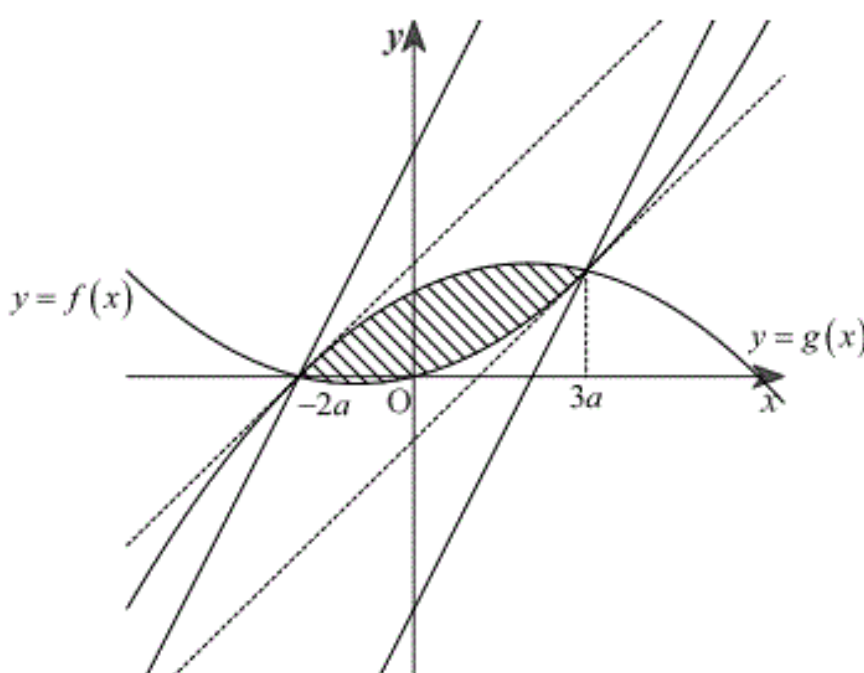
下図より、 k が最大となるのは点 $(3a, 15a^2)$ であるが、このとき

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3a - 15a^2 &= -15\left(a - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{3}{5} \\ &\leq \frac{3}{5} \\ &< 9 \end{aligned}$$

となり不適である。また k が最小となるのは点 $(-2a, 0)$ であるが、このとき

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-2a) - 0 &= -4a \\ &> -1 \left(\because a < \frac{1}{4} \right) \\ &> -9 \end{aligned}$$

となり不適である。



[2] $8a \geq 2$ 、すなわち $a \geq \frac{1}{4}$ のとき

下図より、 k が最大となるのは $y=f(x)$ の、傾きが2の接線との接点であり、

$f'(x)=2x+2a=2$ よりその接点の座標は $(1-a, 1-a^2)$ である。このとき

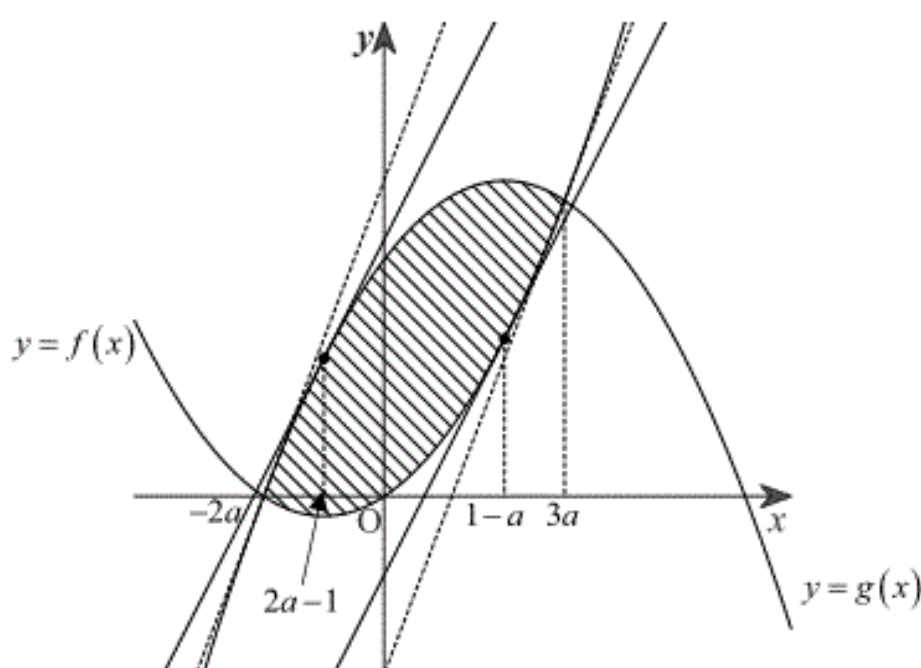
$$\begin{aligned} 2(1-a) - (1-a^2) &= 9 \\ \Leftrightarrow a^2 - 2a - 8 &= 0 \\ \therefore a &= 4 \left(\because a \geq \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

となる。また k が最小となるのは $y=g(x)$ の、傾きが2の接線との接点であり、

$g'(x)=-2x+4a=2$ よりその接点の座標は $(2a-1, 16a^2-1)$ である。このとき

$$\begin{aligned} 2(2a-1) - (16a^2-1) &= -9 \\ \Leftrightarrow 4a^2 - a - 2 &= 0 \\ \therefore a &= \frac{1+\sqrt{33}}{8} \left(\because a \geq \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

となる。



以上[1], [2]より、 $2x-y$ の最大値が9となるのは $a=4$ のときであり、 $2x-y$ の最小値が-9となるのは $a=\frac{1+\sqrt{33}}{8}$ のときである。

(答) $2x-y$ の最大値が9 : $a=4$ 、 $2x-y$ の最小値が-9 : $a=\frac{1+\sqrt{33}}{8}$