

【1】

【解答】

- (ア) $b_{n+1}=b_n$ (イ) 0 (ウ) $\frac{1}{n!}$ (エ) 29 (オ) $\frac{29}{2}$
- (カ) $\frac{8}{81}$ (キ) $\frac{19}{81}$ (ク) $\sqrt{10}+\sqrt{6}$ (ケ) $\sqrt{10}-\sqrt{6}$ (コ) 4
- (サ) $\frac{\sqrt{17}}{2}$ (シ) $-\frac{\sqrt{17}}{2}$

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}n \geq 2 \text{ のとき } a_{n-1} &= (n+1)(a_n - a_{n+1}) \text{ より} \\ a_n &= (n+2)(a_{n+1} - a_{n+2}) \\ \Leftrightarrow a_n &= (n+1)a_{n+1} - (n+2)a_{n+2} + a_{n+1} \\ \Leftrightarrow (n+2)a_{n+2} - a_{n+1} &= (n+1)a_{n+1} - a_n \\ \therefore b_{n+1} &= b_n\end{aligned}$$

という関係式が得られる。一方

$$\begin{aligned}a_1 &= (2+1)(a_2 - a_3) \\ \therefore a_3 &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}b_1 &= (1+1) \cdot \frac{1}{2} - 1 \\ &= 0 \\ b_2 &= (2+1) \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \\ &= 0 \\ \therefore b_1 &= b_2 = \cdots = b_n = 0\end{aligned}$$

とわかる。 $b_n = 0$ より

$$\begin{aligned}(n+1)a_{n+1} - a_n &= 0 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= \frac{a_n}{n+1}\end{aligned}$$

である。これより

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{a_{n-1}}{n} \\ &= \frac{a_{n-2}}{n(n-1)} \\ &= \frac{a_1}{n(n-1) \cdots 2} \\ &= \frac{1}{n!} \\ \therefore a_n &= \frac{1}{n!}\end{aligned}$$

となる。

(2)

不等式 $n^2 - 57n + 810 \leq 0$ より

$$(n-27)(n-30) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 27 \leq n \leq 30$$

となるから、 n は 27, 28, 29, 30 のいずれかである。 $f(x)$ の第 4 次導関数まで求めると

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2 \cos 2x \\ f''(x) &= -4 \sin 2x \\ f^{(3)}(x) &= -8 \cos 2x \\ f^{(4)}(x) &= 16 \sin 2x \\ &= 2^4 f(x)\end{aligned}$$

となる。これより

$$\begin{aligned}f^{(4k-3)}(x) &= 2^{4k-3} \cos 2x \\ f^{(4k-2)}(x) &= -2^{4k-2} \sin 2x \\ f^{(4k-1)}(x) &= -2^{4k-1} \cos 2x \\ f^{(4k)}(x) &= 2^{4k} \sin 2x\end{aligned}$$

が $k=1, 2, \dots$ で成立する。 $f^{(n)}(0) > 0$ のときは $n=4k-3$ のときのみであるから、 $n=29$ とわかる。従って

$$\begin{aligned}\log_4 f^{(29)}(0) &= \log_4 2^{29} \\ &= \log_4 4^{\frac{29}{2}} \\ &= \frac{29}{2}\end{aligned}$$

である。

(3)

すべて赤球, すべて白球, すべて黄球の場合の確率をそれぞれ足し合わせると, すべて同じ色である確率

$$\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{9} = \frac{8}{81}$$

を得る。A, B, C から取り出す 3 球がすべて異なる色であるとき, その色の組合せ全 6 通りの場合の確率をそれぞれ足し合わせると, すべて異なる色である確率

$$\frac{2}{9} \left(\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{9} + \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} \right) + \frac{3}{9} \left(\frac{3}{9} \cdot \frac{3}{9} + \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{9} \right) + \frac{4}{9} \left(\frac{3}{9} \cdot \frac{2}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \right) = \frac{19}{81}$$

を得る。

(4)

点 O' から OA に下ろした垂線の足を点 H とおく。四角形 O'BAH は長方形より

$$\begin{aligned}O'H &= 5 \\ OH &= r - r'\end{aligned}$$

である。△OO'H について三平方の定理より

$$49 = (r - r')^2 + 25$$

を満たす。条件より $r > r'$ だから

$$r - r' = 2\sqrt{6} \quad \cdots \text{①}$$

を得る。点 O' から OP の延長線上に下ろした垂線の足を点 H' とおく。四角形 O'QPH' は長方形より

$$\begin{aligned}O'H' &= 3 \\ OH' &= r + r'\end{aligned}$$

である。△OO'H' について三平方の定理より

$$49 = (r + r')^2 + 9$$

を満たす。条件より $r > r' > 0$ だから

$$r - r' = 2\sqrt{10} \quad \cdots \text{②}$$

を得る。①, ②より

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{10} + \sqrt{6} \\ r' &= \sqrt{10} - \sqrt{6}\end{aligned}$$

である。また AR = PR, QR = BR より

$$\begin{aligned}\begin{cases} 5 = AB \\ 3 = PQ \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = AR + BR \\ 3 = AR - BR \end{cases}\end{aligned}$$

となり, これを解くと

$$AR = 4$$

とわかる。

(5)

$x^2 + y^2 = 1$ より, $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たす実数 θ を用いて

$$\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$$

とおいてよい。これより

$$\begin{aligned}2x^2 + xy - 2y^2 &= 2 \cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta - 2 \sin^2 \theta \\ &= (1 + \cos 2\theta) + \frac{1}{2} \sin 2\theta - (1 - \cos 2\theta) \\ &= 2 \cos 2\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \\ &= \frac{\sqrt{17}}{2} \sin(2\theta + \alpha)\end{aligned}$$

と表せる。ここで、 α は $\tan \alpha = 4$ を満たす実数である。 $0 \leq \theta < 2\pi$ より $-1 \leq \sin(2\theta + \alpha) \leq 1$ だから

$$\begin{aligned}M &= \frac{\sqrt{17}}{2} \\ m &= -\frac{\sqrt{17}}{2}\end{aligned}$$

である。

【2】

(1)

等式 $AP = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ が成立するから

$$\begin{aligned} AP &= P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & t \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & x \\ -1 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & x \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4-t & 2x+2t \\ -3 & -2x-2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2a & bx \\ -a & 2b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。各成分を比較して

$$\begin{cases} 4-t=2a \\ 2x+2t=bx \\ -3=-a \\ -2x-2=2b \end{cases}$$

を得る。これを解くと、 $a=3, t=-2, x=1$ または -4 となる。ところが P は逆行列をもつから

$$\begin{aligned} \det P &\neq 0 \\ \Leftrightarrow x+4 &\neq 0 \\ \Leftrightarrow x &\neq -4 \end{aligned}$$

である。従って、 $x=1$ で $b=-2$ となる。以上より

$$t=-2, x=1, a=3, b=-2$$

とわかる。

(答) $t=-2, x=1, a=3, b=-2$

(2)

(1)の結果を利用して

$$P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

となる。 $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = B$ とおくと $AP = PB$ より $B = P^{-1}AP$ となる。ここで

$$\begin{aligned} B^n &= (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP) \\ &= P^{-1}A(P P^{-1})A(P P^{-1})A\cdots(P P^{-1})AP \\ &= P^{-1}A^n P \end{aligned}$$

であり、一方

$$B^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$$

であるから、 A^n は

$$\begin{aligned} A^n &= P B^n P^{-1} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \cdot 3^n & (-2)^n \\ -3^n & 2 \cdot (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \cdot 3^n + (-2)^n & -2 \cdot 3^n - (-2)^{n+1} \\ -2 \cdot 3^n - (-2)^{n+1} & 3^n + (-2)^{n+2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と導ける。

$$(答) A^n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \cdot 3^n + (-2)^n & -2 \cdot 3^n - (-2)^{n+1} \\ -2 \cdot 3^n - (-2)^{n+1} & 3^n + (-2)^{n+2} \end{pmatrix}$$

【3】

(1)

$f(x)$ は

$$f(x)=\frac{2}{1+e^x}-1$$

となる。 $f'(x), f''(x)$ を求めると

$$f'(x)=-\frac{2e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$<0$$

$$f''(x)=(-2)\cdot\frac{e^x(1+e^x)^2-2e^x(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4}$$

$$=\frac{2e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$$

となる。また、無限大での $f(x)$ を考えると

$$\lim_{x\rightarrow\infty}f(x)=\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{\frac{1}{e^x}-1}{\frac{1}{e^x}+1}$$

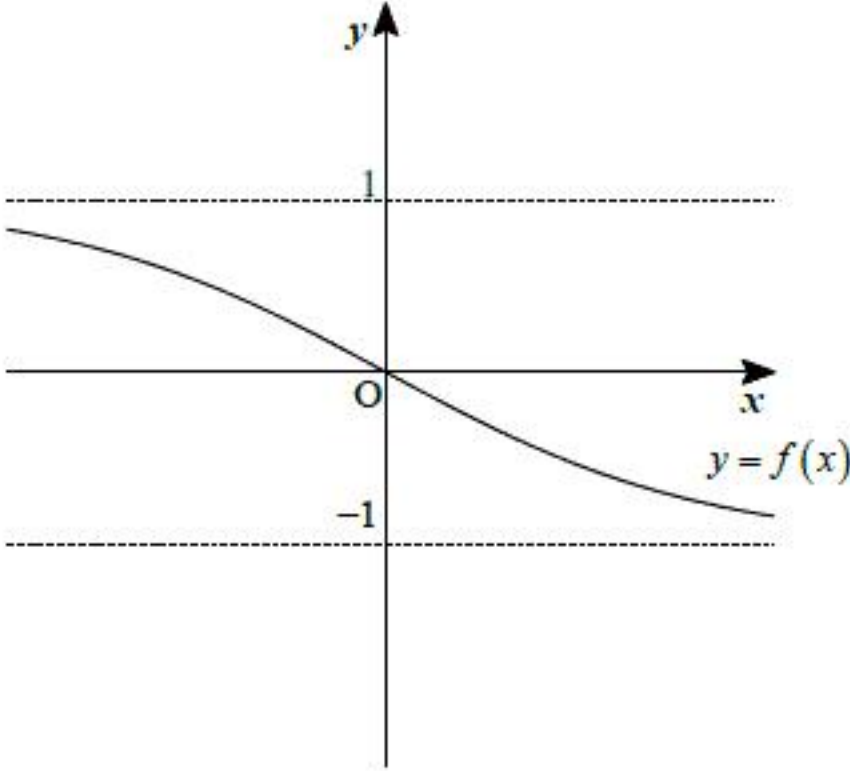
$$=-1$$

$$\lim_{x\rightarrow-\infty}f(x)=1$$

となる。従って、増減表をかくと下のようになる。

x	$(-\infty)$	$\cdots$	0	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$-$		$-$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	(1)	$\searrow$	0	$\swarrow$	(-1)

これより、グラフの概形をかくと下のようになる。



(答) 前図

(2)

$\frac{f(\alpha)}{\alpha}$ に $\alpha=-x$ を代入すると

$$\frac{f(-x)}{-x}=-\frac{1}{x}\cdot\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$=-\frac{1}{x}\cdot\frac{e^x-1}{e^x+1}$$

$$=\frac{f(x)}{x}$$

となるから、 $\alpha>0$ の場合を考えれば十分である。 $\alpha<\beta$ となる β を考えると、 $f(x)$ は単調減少より

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha}>\frac{f(\alpha)}{\beta}>\frac{f(\beta)}{\beta}$$

が成立する。すなわち、 $\frac{f(\alpha)}{\alpha}$ は $\alpha>0$ で単調減少する。また

$$\lim_{\alpha\rightarrow 0}\frac{f(\alpha)}{\alpha}=\lim_{\alpha\rightarrow 0}\frac{f(\alpha)-f(0)}{\alpha-0}(\because f(0)=0)$$

$$=f'(0)$$

$$=-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{\alpha\rightarrow\infty}\frac{f(\alpha)}{\alpha}=\lim_{\alpha\rightarrow\infty}\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\frac{1}{e^\alpha}-1}{\frac{1}{e^\alpha}+1}$$

$$=0$$

であるから、以上より

$$-\frac{1}{2}<\frac{f(\alpha)}{\alpha}<0$$

となる。

(答) $-\frac{1}{2}<\frac{f(\alpha)}{\alpha}<0$

(3)

求める面積 S は

$$S=\int_0^\alpha\left(\frac{f(\alpha)}{\alpha}x-f(x)\right)dx$$

$$=\frac{f(\alpha)}{\alpha}\int_0^\alpha xdx-\int_0^\alpha\left(1-\frac{2e^x}{1+e^x}\right)dx$$

$$=\frac{1-e^\alpha}{\alpha(1+e^\alpha)}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\alpha-\left[x-2\log(1+e^x)\right]_0^\alpha$$

$$=\frac{\alpha(1-e^\alpha)}{2(1+e^\alpha)}-\alpha+2\log(1+e^\alpha)-2\log 2$$

となる。

(答) $\frac{\alpha(1-e^\alpha)}{2(1+e^\alpha)}-\alpha+2\log(1+e^\alpha)-2\log 2$