

【1】

【解答】

(1)	(ア) $-7 \cdot 3^{n-1}$	(イ) $\frac{-7 \cdot 3^{n-1} + 9}{2}$	(ウ) $-\frac{1}{48}$	
(2)	(エ) $(-1, -2)$	(オ) $(2, 1)$	(カ) $\frac{9}{2}$	(キ) $\frac{16}{3}\pi$
(3)	(ク) $(1, \sqrt{3}, 0)$	(ケ) $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3}\sqrt{6}\right)$	(コ) $2\sqrt{m^2 - m + 1}$	(サ) $\frac{3}{8}$
(4)	(シ) $\frac{1}{55}$	(ス) $\frac{3}{55}$	(セ) $\frac{27}{55}$	(ソ) $\frac{6}{55}$

【解説】

(1)

仮定より $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= a_{n+1} - a_n \\ &= 3a_n - 9 - 3a_{n-1} + 9 \\ &= 3(a_n - a_{n-1}) \\ &= 3b_{n-1} \\ &= 3^{n-1}b_1 \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} b_1 &= a_2 - a_1 \\ &= (3a_1 - 9) - a_1 \\ &= (3 - 9) - 1 \\ &= -7 \end{aligned}$$

であることから、

$$b_n = -7 \cdot 3^{n-1}$$

となり、これは $n=1$ のときも成り立つ。これより $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} b_k &= \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} (-7 \cdot 3^{k-1}) &= a_n - a_1 \\ \Leftrightarrow \frac{-7(3^{n-1} - 1)}{2} &= a_n - 1 \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{-7 \cdot 3^{n-1} + 9}{2} \end{aligned}$$

を得る。これは、 $n=1$ のときも成り立つ。また、ここから

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{9^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{7}{18} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ -\frac{7}{18} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9}\right)^{k-1} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{7}{18} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n}{1 - \frac{1}{9}} \right\} \\ &= -\frac{7}{18} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{8} \\ &= -\frac{1}{48} \end{aligned}$$

となる。

(2)

直線 $l: y=x-1$ と曲線 $C: y^2=-x+3$ の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} (x-1)^2 &= -x+3 \\ \Leftrightarrow x^2 - x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)(x+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -1, 2 \end{aligned}$$

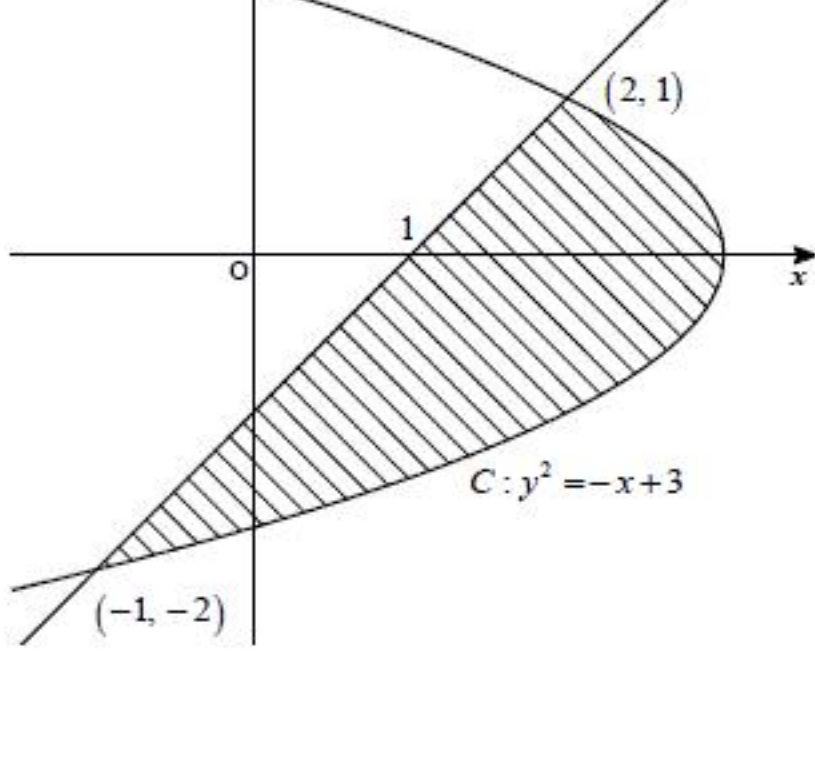
となる。これより l と C の交点の座標は $(-1, -2), (2, 1)$ である。 l について

$$\begin{aligned} y &= x-1 \\ \Leftrightarrow x &= y+1 \end{aligned}$$

であり、 C について

$$\begin{aligned} y^2 &= -x+3 \\ \Leftrightarrow x &= -y^2+3 \end{aligned}$$

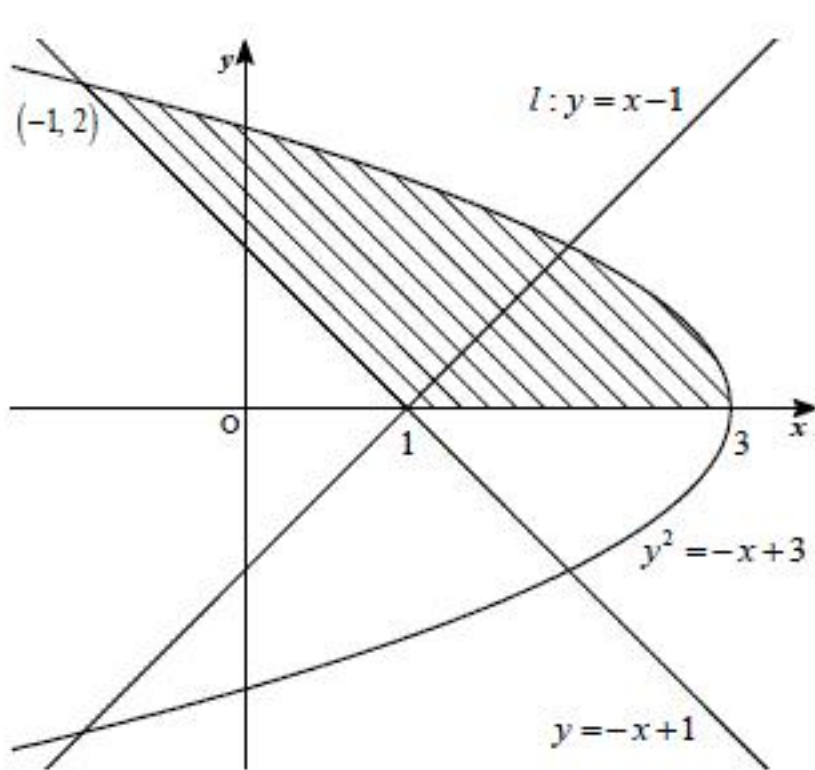
l と C で囲まれた図形 D の概形は下図のようになる。



図形 D の面積は

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \{(-y^2+3) - (y+1)\} dy &= -\int_{-1}^1 (y^2+y-2) dy \\ &= -\int_{-1}^1 (y-1)(y+2) dy \\ &= \frac{1}{6} \{1 - (-2)\}^3 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

となる。また、図形 D の $y < 0$ の部分を x 軸に関して折り返した図形の概形は下図のようになる。



これより、図形 D を x 軸のまわりに一回転してできる立体は、直線 $x=-1$ と放物線で囲まれた領域を x 軸のまわりに一回転してできる立体から、半径 2、高さ 2 の円錐を除いたものである。よって求める体積は

$$\begin{aligned} \pi \int_{-1}^3 y^2 dx - \frac{1}{3} \pi \cdot 2^2 \cdot 2 &= \pi \int_{-1}^3 (-x+3) dx - \frac{8}{3} \pi \\ &= \pi \left[-\frac{1}{2} x^2 + 3x \right]_{-1}^3 - \frac{8}{3} \pi \\ &= \frac{16}{3} \pi \end{aligned}$$

である。

(3)

(i)

正四面体の辺の長さは 2 であり、頂点を共有する辺のなす角は $\frac{\pi}{3}$ である。よって

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OB}|^2 &= 2^2 \\ \Leftrightarrow b_1^2 + b_2^2 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow 2b_1 &= 2 \cdot 2 \cos \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow b_1 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OC}|^2 &= 2^2 \\ \Leftrightarrow c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} &= |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OC}| \cos \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow 2c_1 &= 2 \cdot 2 \cos \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow c_1 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} &= |\overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{OC}| \cos \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow b_1 c_1 + b_2 c_2 &= 2 \cdot 2 \cos \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow b_1 c_1 + b_2 c_2 &= 2 \end{aligned}$$

であるから、 $b_2 > 0, c_3 > 0$ のもとでこれを解いて

$$b_1 = 1, b_2 = \sqrt{3}, c_1 = 1, c_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}, c_3 = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

を得る。よって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OB} &= (1, \sqrt{3}, 0) \\ \overrightarrow{OC} &= \left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3}\sqrt{6}\right) \end{aligned}$$

となる。

(ii)

点 F は辺 BC を $m:(1-m)$ に内分する点であることより

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OF} &= (1-m)\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC} \\ &= \left((1-m) + m, \sqrt{3}(1-m) + \frac{\sqrt{3}}{3}m, \frac{2}{3}\sqrt{6}m\right) \\ &= \left(1, \sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{3}m, \frac{2}{3}\sqrt{6}m\right) \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OF}| &= \sqrt{1 + \left(\sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{3}m\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\sqrt{6}m\right)^2} \\ &= 2\sqrt{m^2 - m + 1} \end{aligned}$$

である。また点 E は辺 AB の中点であることより

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OE} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \\ &= \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \\ |\overrightarrow{OE}| &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

であるから、 $\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}$ のなす角が 30° のとき

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OF}}{|\overrightarrow{OE}| |\overrightarrow{OF}|} &= \cos 30^\circ \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{2} - m}{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{m^2 - m + 1}} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow (3-m)^2 &= 9(m^2 - m + 1) \\ \Leftrightarrow m(8m-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow m &= \frac{3}{8} (\because 0 < m < 1) \end{aligned}$$

となる。

(4)

カードを取り出すとき、全てのカードの取り出し方は同様に確からしいとする。このとき、12 枚の札から 3 枚の札を無作為に取り出すとき、カードの取り出し方は全部で ${}_{12}C_3$ 通りある。

(i)

3 枚が全て同じマークになる場合の数は、取り出すマークの選び方に等しく、4 通りある。よって、求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{4}{{}_{12}C_3} &= \frac{4}{220} \\ &= \frac{1}{55} \end{aligned}$$

である。

(ii)

3 枚が全て同じ数字になる場合、取り出す数字の選び方は 3 通りあり、取り出したマークの選び方が ${}_4C_3$ 通りある。よって、求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{3 \cdot {}_4C_3}{{}_{12}C_3} &= \frac{3 \cdot 4}{220} \\ &= \frac{3}{55} \end{aligned}$$

である。

(iii)

3 枚のマークが全て異なる場合、取り出すマークの選び方は ${}_4C_3$ 通りあり、それぞれのマークにおいて取り出す数字の選び方が 3 通りずつある。よって、求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{{}_4C_3 \cdot 3!}{{}_{12}C_3} &= \frac{4 \cdot 3!}{220} \\ &= \frac{6}{55} \end{aligned}$$

である。

(iv)

3 枚のマークが全て異なり、かつ数字も全て異なる場合、取り出すマークの選び方は ${}_4C_3$ 通りあり、マークと数字の対応は $3!$ 通りある。よって、求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{{}_4C_3 \cdot 3!}{{}_{12}C_3} &= \frac{4 \cdot 6}{220} \\ &= \frac{6}{55} \end{aligned}$$

である。

【2】

(1)

平面上のある点 $P(x, y)$ に対して $Q=f(P)$ となる点を $Q(x', y')$ とおく。2 点 P, Q は直線 $y=2x$ に関して対称であることから

線分 PQ の中点が直線 $y=2x$ 上に存在する

$$\Leftrightarrow \frac{y+y'}{2} = 2 \cdot \frac{x+x'}{2}$$

線分 PQ と直線 $y=2x$ が直交する

$$\Leftrightarrow (x-x') + 2(y-y') = 0$$

となる。よって、

$$(x', y') = \left(\frac{-3x+4y}{5}, \frac{4x+3y}{5} \right)$$

である。これより

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となることから、一次変換 f を表す行列 A は

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

となる。また点 H は点 P から直線 $y=2x$ に下ろした垂線の足であり、これは線分 PQ の中点にあたることから、 $H(x'', y'')$ とおくと

$$\begin{aligned} (x'', y'') &= \left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2} \right) \\ &= \left(\frac{x+2y}{5}, \frac{2x+4y}{5} \right) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となることから、一次変換 g を表す行列 B は

$$B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(2)

f は任意の点を直線 $y=2x$ に関して対称に移動させる変換、 g は任意の点から直線 $y=2x$ に下ろした垂線の足へと移動させる変換である。よって合成変換 $f \circ f$ は恒等変換であるから、これを表す行列 A^2 は

$$A^2 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。 $f \circ g$ は任意の点から直線 $y=2x$ に下ろした垂線の足を直線 $y=2x$ に関して対称に移動させる変換であるが、これは g に等しいため、これを表す行列 AB は

$$AB = B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。 $g \circ f$ は任意の点を直線 $y=2x$ に関して対称に移動させた点から直線 $y=2x$ に下ろした垂線の足へと移動させる変換であるが、これは g に等しいため、これを表す行列 BA は

$$BA = B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{3}$$

である。 $g \circ g$ は任意の点から直線 $y=2x$ に下ろした垂線の足に移動させ、この点から直線 $y=2x$ に下ろした垂線の足に移動させる変換であるが、これは g に等しいため、これを表す行列 B^2 は

$$B^2 = B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{4}$$

である。

$$(\text{答}) \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, AB = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, BA = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B^2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(3)

命題「行列 $G=(A+kB)^n$ は $G=\alpha A+\beta B$ 、または $G=\alpha E+\beta B$ という形で表せる」

を数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき

$G=A+kB$ は $\alpha=1, \beta=k$ として $G=\alpha A+\beta B$ という形で表すことができる。よって、命題は成り立つ。

[2] $n=m$ のとき命題が成り立つと仮定する。

$G=(A+kB)^m$ は $G=\alpha A+\beta B$ 、または $G=\alpha E+\beta B$ という形で表せる。このとき、①、②、

③、④を適宜用いて

$$\begin{aligned} (A+kB)^{m+1} &= (A+kB)(A+kB)^m \\ &= (A+kB)(\alpha A+\beta B) \\ &= \alpha A^2 + \beta AB + k\alpha BA + k\beta B^2 \\ &= \alpha E + (\beta + k\alpha + k\beta)B \end{aligned}$$

または

$$\begin{aligned} (A+kB)^{m+1} &= (A+kB)(A+kB)^m \\ &= (A+kB)(\alpha E+\beta B) \\ &= \alpha A + \beta AB + k\alpha B + k\beta B^2 \\ &= \alpha A + (\beta + k\alpha + k\beta)B \end{aligned}$$

となり、 $n=m+1$ のときも命題は成り立つことが示された。

以上、[1]、[2]より、全ての自然数 n について命題は示された。ここで

$$G_n = (A+kB)^n = \alpha_n A + \beta_n B \text{ または } G_n = \alpha_n E + \beta_n B$$

と表記すると、求める α, β の値はそれぞれ α_n, β_n に対応する。上記より

$$\alpha_1 = 1 \quad \dots \textcircled{5}$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n \quad \dots \textcircled{6}$$

$$\beta_1 = k \quad \dots \textcircled{7}$$

$$\beta_{n+1} = k + (k+1)\beta_n \quad \dots \textcircled{8}$$

となる。⑤、⑥より

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} = \dots = \alpha_1 = 1$$

$$\therefore \alpha = 1$$

である。⑦、⑧より

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} &= k + (k+1)\beta_n \\ \Leftrightarrow \beta_{n+1} + 1 &= (k+1)(\beta_n + 1) \\ \Leftrightarrow \beta_n + 1 &= (k+1)^{n-1}(\beta_1 + 1) \\ \Leftrightarrow \beta_n + 1 &= (k+1)^n \\ \Leftrightarrow \beta_n &= (k+1)^n - 1 \\ \therefore \beta &= (k+1)^n - 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \alpha = 1, \beta = (k+1)^n - 1$$

【3】

(1)

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

について

$$f'(x) = x(2-x)e^{-x}$$

$$f''(x) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$$

となる。ここで、 $f'(x) = 0$ のとき $x = 0, 2$ であり、 $f''(x) = 0$ のとき $x = 2 \pm \sqrt{2}$ である。

$$f(0) = 0$$

$$f(2 - \sqrt{2}) = (6 - 4\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}}$$

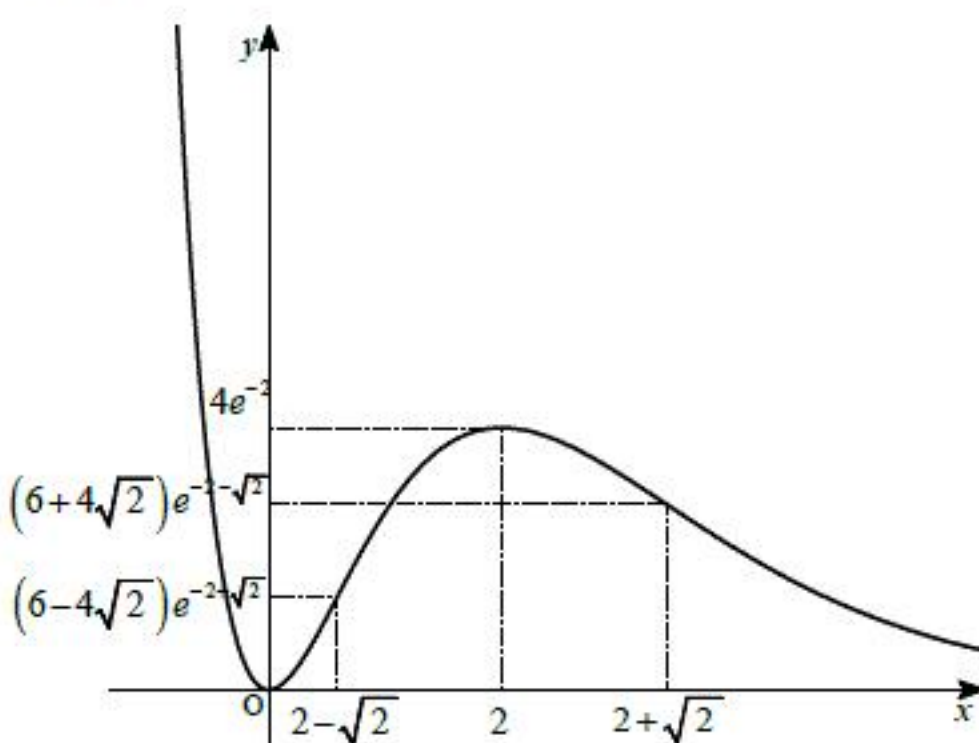
$$f(2) = 4e^{-2}$$

$$f(2 + \sqrt{2}) = (6 + 4\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}}$$

であることから増減表は以下のようになる。

x	...	0	...	$2 - \sqrt{2}$	...	2	...	$2 + \sqrt{2}$	...
$f'(x)$	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	↘	0	↗	$(6 - 4\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}}$	↗	$4e^{-2}$	↘	$(6 + 4\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}}$	↘

また $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} = 0$ であるから、グラフの概形は下のようになる。



(答) 上図

(2)

$y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t) + f(t) \\ &= t(2-t)e^{-t}(x-t) + t^2 e^{-t} \\ &= t(2-t)e^{-t}x + t^2(t-1)e^{-t} \end{aligned}$$

であり、これが点 $P(0, a)$ を通るとき、

$$a = t^2(t-1)e^{-t} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。 t の値を定めると接線は 1 つに定まることから、点 $P(0, a)$ から曲線 $y = f(x)$ に引ける接線の本数は、 $\textcircled{1}$ を t に関する方程式と見たときの実数解の個数に対応する。さらに、この実数解 t は ts 平面上における 2 つの関数 $s = a$, $s = t^2(t-1)e^{-t}$ の交点の t 座標に対応する。

$g(t) = t^2(t-1)e^{-t}$ とおくと、

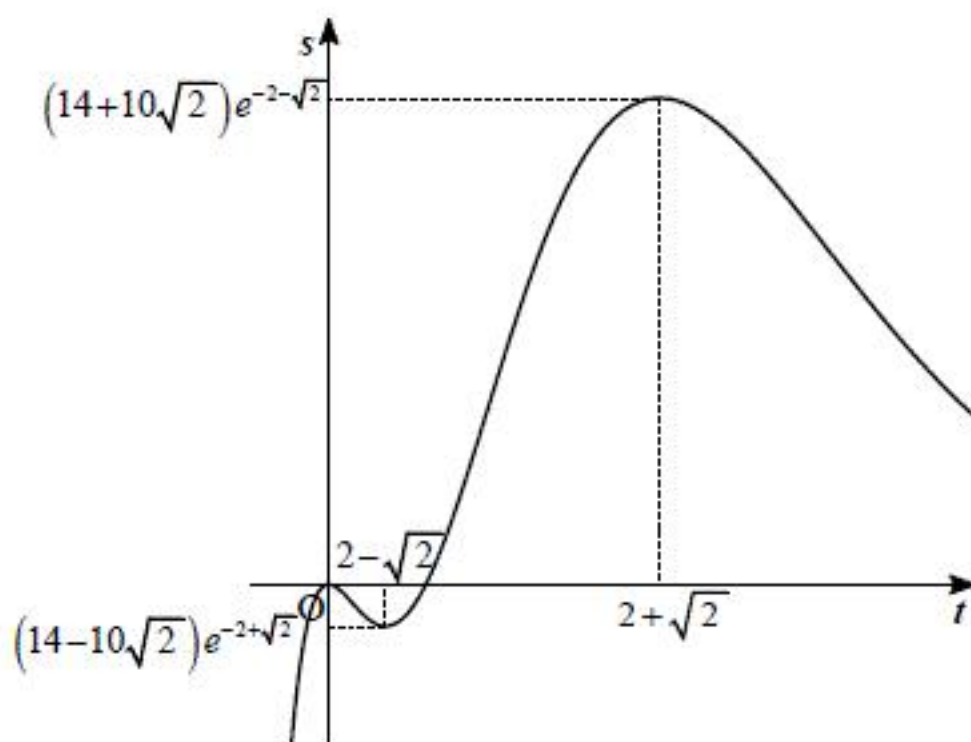
$$\begin{aligned} g'(t) &= 2t(t-1)e^{-t} + t^2 e^{-t} - t^2(t-1)e^{-t} \\ &= -t(t^2 - 4t + 2)e^{-t} \end{aligned}$$

であり、 $g'(t) = 0$ のとき $t = 2 \pm \sqrt{2}$ となる。 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) より

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} t^2(t-1)e^{-t} &= \lim_{u \rightarrow \infty} (u+1)^2 u e^{-u-1} \\ &= \frac{1}{e} \lim_{u \rightarrow \infty} (u^3 + 2u^2 + u) e^{-u} \\ &= 0 \end{aligned}$$

に注意すると関数 $g(t)$ の増減表とグラフは以下のようになる。

t	...	0	...	$2 - \sqrt{2}$	...	$2 + \sqrt{2}$	...
$g'(t)$	+	0	-	0	+	0	-
$g(t)$	↗	0	↘	$(14 - 10\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}}$	↗	$(14 + 10\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}}$	↘



点 $P(0, a)$ から曲線 $y = f(x)$ に引ける接線の本数は、2 つの関数 $s = a$, $s = g(t)$ の交点の個数に一致することより

$$a > (14 + 10\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}} \text{ のとき } 0 \text{ 本}$$

$$a < (14 - 10\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}}, a = (14 + 10\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}} \text{ のとき } 1 \text{ 本}$$

$$0 \leq a < (14 + 10\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}}, a = (14 - 10\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}} \text{ のとき } 2 \text{ 本}$$

$$(14 + 10\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}} < a < 0 \text{ のとき } 3 \text{ 本}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad a > (14 + 10\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}} \text{ のとき} \quad 0 \text{ 本}$$

$$a < (14 - 10\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}}, a = (14 + 10\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}} \text{ のとき} \quad 1 \text{ 本}$$

$$0 \leq a < (14 + 10\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}}, a = (14 - 10\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}} \text{ のとき} \quad 2 \text{ 本}$$

$$(14 + 10\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}} < a < 0 \text{ のとき} \quad 3 \text{ 本}$$