

【11】

(1) (ア) ${}_4C_k \cdot a^k \cdot b^{4-k}$ (イ),(ウ) $-a+5, -a-5$ (順不同)
(エ) 4 (オ) -6

(2) (カ) (1,0) (キ) $y=\frac{2}{b}x+\frac{b}{2}$ (ク) $y=-\frac{b}{2}x+\frac{b^2}{8}+b$

(ケ) $2\sqrt{3}$
(3) (コ) $\frac{1}{216}$ (サ) $\frac{7}{648}$ (シ) $\frac{5}{72}$

(ス) $\frac{5}{18}$

(4) (セ) $3\sqrt{3}$ (ソ) $\frac{2}{3}$ (タ) $\frac{1}{3}$

(チ) $-\frac{3}{8}$ (ツ) $\frac{6}{19}$ (テ) $\frac{3}{19}$

(ト) $\frac{9\sqrt{3}}{19}$

【解説】

(1)

(ア)

二項定理より、 $(ax+b)^4=\sum_{k=0}^4{}_4C_k \cdot a^k \cdot b^{4-k} \cdot x^k$ となる。

(イ)(ウ)

すべての x^k の係数、および定数項の和は、 $(ax+b)^4$ に $x=1$ を代入したものに等しい。

$$b^4+4ab^3+6a^2b^2+4a^3b+a^4=625$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^4=625$$

$$\Leftrightarrow a+b=\pm 5$$

よって、

$$b=-a\pm 5$$

となる。

・・・①

(エ)(オ)

x^2 の係数は (ア) より ${}_4C_2 \cdot a^2 \cdot b^2=216$ なので、

$$6a^2b^2=216 \Leftrightarrow ab=\pm 6$$

である。

このことと①より、 a, b は 2 次方程式の解と係数の関係から

$$x^2-(a+b)x+ab=0$$

の解であることになる。①、②の値の各場合について場合分けすると、

(i) $a+b=5, ab=6$ の場合

$$x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2, 3$$

よって、 $a>b$ より $a=3, b=2$

(ii) $a+b=5, ab=-6$ の場合

$$x^2-5x-6=0 \Leftrightarrow x=-1, 6$$

よって、 $a>b$ より $a=6, b=-1$

(iii) $a+b=-5, ab=6$ の場合

$$x^2+5x+6=0 \Leftrightarrow x=-2, -3$$

よって、 $a>b$ より $a=-2, b=-3$

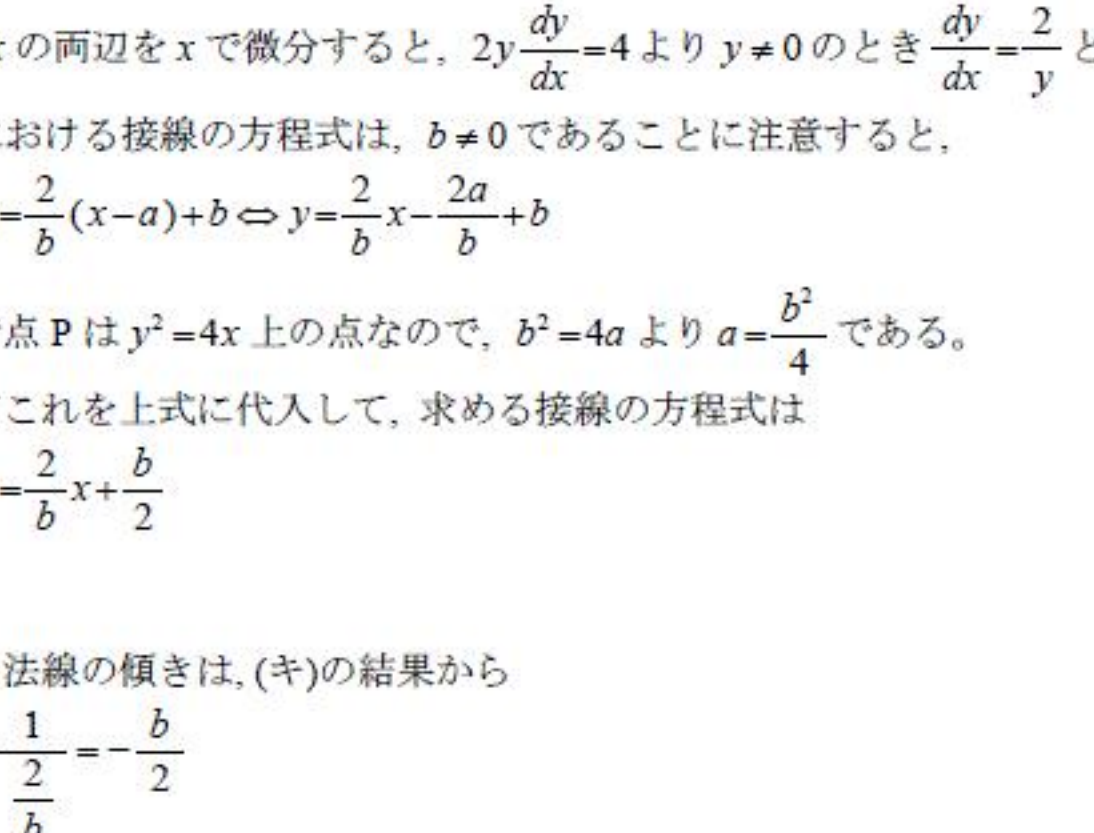
(iv) $a+b=-5, ab=-6$ の場合

$$x^2+5x-6=0 \Leftrightarrow x=-6, 1$$

よって、 $a>b$ より $a=1, b=-6$

以上より、仮定を満たす a, b の組は、全部で 4 通りであり、 b の最小値は $b=-6$ 。

(2)



(カ)

焦点が $(f, 0)$ の放物線は $4f \cdot x = y^2$ と表せるので、 $f=1$ である。

よって、 $A(1, 0)$

(キ)

$y^2=4x$ の両辺を x で微分すると、 $2y \frac{dy}{dx}=4$ より $y \neq 0$ のとき $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{y}$ となるので、

点 P における接線の方程式は、 $b \neq 0$ であることに注意すると、

$$y=\frac{2}{b}(x-a)+b \Leftrightarrow y=\frac{2}{b}x-\frac{2a}{b}+b$$

ここで点 P は $y^2=4x$ 上の点なので、 $b^2=4a$ より $a=\frac{b^2}{4}$ である。

よってこれを上式に代入して、求める接線の方程式は

$$y=\frac{2}{b}x+\frac{b}{2}$$

(ク)

求める法線の傾きは、(キ)の結果から

$$-\frac{1}{\frac{2}{b}}=-\frac{b}{2}$$

であるので、点 P における法線の方程式は、

$$y=-\frac{b}{2}(x-a)+b \Leftrightarrow y=-\frac{b}{2}x+\frac{ab}{2}+b$$

よって $a=\frac{b^2}{4}$ より、

$$y=-\frac{b}{2}x+\frac{b^3}{8}+b$$

(ケ)

直線 AP の方程式は、

$$a \neq 1 \text{ の時、 } y=\frac{b}{a-1}(x-1)$$

$$a=1 \text{ の時、 } x=1$$

となる。

(i) $a \neq 1$ の時

法線と直線 AP のなす角が $\frac{\pi}{3}$ であることより、

$$\tan \frac{\pi}{3}=\pm \frac{-\frac{b}{2}-\frac{b}{a-1}}{1+\left(-\frac{b}{2}\right) \cdot \frac{b}{a-1}}$$

$$\sqrt{3}=\pm \frac{-b(a+1)}{2(a-1)-b^2}$$

$$=\pm \frac{-b\left(\frac{b^2}{4}+1\right)}{2\left(\frac{b^2}{4}-1\right)-b^2}$$

$$=\pm \frac{b}{2}$$

よって $b>0$ とあわせて、 $b=2\sqrt{3}$

(ii) $a=1$ の時

この時、 $b^2=4a$ と $b>0$ より、 $b=2$ である。

よって、法線の傾きは $-\frac{b}{2}=-1$ なので、法線と x 軸のなす角は $\frac{\pi}{4}$ であり、この

ことから、法線と AP がなす角は $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$ である。

これは、法線と直線 AP のなす角が $\frac{\pi}{3}$ であることに矛盾。

よって以上より、正の数 b の値は $b=2\sqrt{3}$ である。

(3)

(コ)

1 個の箱にだけ玉が入るというのは、さいころを 4 回ふって全部同じ目が出たという事である。

ゆえに、その確率は、 $6 \times \left(\frac{1}{6}\right)^4=\frac{1}{216}$

(サ)

1 または 2 の箱にボールが入るときの確率から、1 の箱のみにボールが入る場合と 2 の箱のみにボールが入る場合を除いたものが求める確率である。

1 または 2 の箱にボールが入るときの確率は、

$$\left(\frac{2}{6}\right)^4=\frac{1}{81}$$

である。

1 の箱のみにボールが入る確率と、2 の箱のみにボールが入る確率はそれぞれ、

$$\left(\frac{1}{6}\right)^4=\frac{1}{1296}$$

である。よって求める確率は、

$$\frac{1}{81}-2 \times \frac{1}{1296}=\frac{7}{648}$$

(シ)

球が入る箱 2 つの選び方は、 ${}_6C_2=15$ 通り。

また、球が入る箱の番号を A, B とすると、A の目 2 回 B の目 2 回の出る順番は全部で ${}_6C_2=6$ 通り。

よって、求める確率は、

$$15 \cdot 6 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4=\frac{5}{72}$$

(ス)

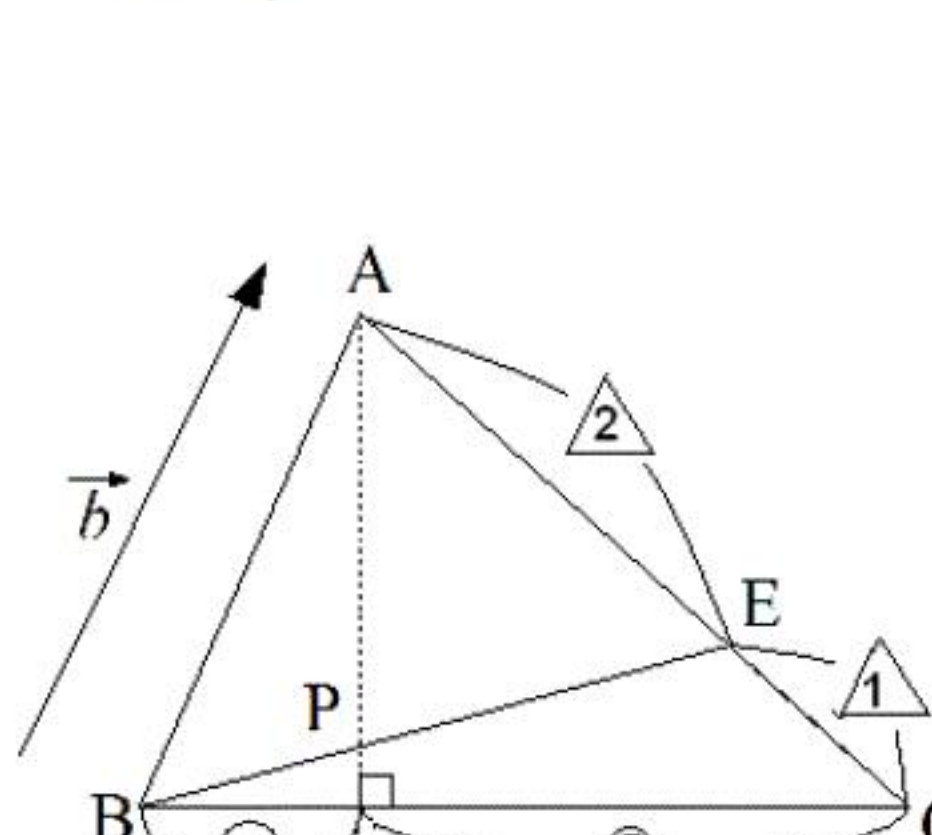
球が入る箱 4 つの選び方は、 ${}_6C_4=15$ 通り。

また、球が入る箱に対応する目の出る順番は $4!=24$ 通り。

よって、求める確率は、

$$15 \cdot 24 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4=\frac{5}{18}$$

(4)



(i)

(セ)

三角形 ABC の面積は、

$$\triangle ABC=\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \sin \angle ABC=\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sin 60^{\circ}=3 \sqrt{3}$$

(ii)

(ソ)(タ)

点 E は線分 AC を 2:1 に内分する点なので、

$$\overline{BE}=\frac{2}{3} \overline{a}+\frac{1}{3} \overline{b}$$

(iii)

(チ)

点 H を線分 BC を $m:(1-m)$ に内分する点であるとする。

この時 $\overline{BH}=m \overline{a}$ であり、

$$\overline{AH}=\overline{AB}+\overline{BH}=-\overline{b}+m \overline{a} \quad \cdots \cdots ①$$

である。

ここで $\overline{AH} \perp \overline{BH}$ より、 $\overline{AH} \cdot \overline{BH}=0$ 。

ゆえに、

$$m \overline{a} \cdot\left(m \overline{a}-\overline{b}\right)=0 \Leftrightarrow m^2\left|\overline{a}\right|^2-m \overline{a} \cdot \overline{b}=0 \quad \cdots \cdots ②$$

となる。

ここで、 $\left|\overline{a}\right|=4$ であり、また、

$$\overline{a} \cdot \overline{b}=\left|\overline{a}\right| \cdot\left|\overline{b}\right| \cdot \cos 60^{\circ}$$

$$=3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$=6$$

より、これを②に代入すれば、

$$16 m^2-6 m=0 \Leftrightarrow m(8 m-3)=0$$

これを解くと、 $m \neq 0$ なので、 $m=\frac{3}{8}$

よってこれと①より、

$$\overline{AH}=\frac{3}{8} \overline{a}-\overline{b}$$

$$\overline{HA}=-\frac{3}{8} \overline{a}+\overline{b}$$

(iv)

(ツ)(テ)

点 P は、線分 AH を $s:(1-s)$ に、さらに線分 BE を $t:(1-t)$ に内分する点とする。

この時、

$$\overline{AP}=s \overline{AH}=\frac{3 s}{8} \overline{a}-s \overline{b} \quad \cdots \cdots ③$$

$$\overline{AP}=\overline{AB}+t \overline{BE}$$

$$=-\overline{b}+t \overline{BE}$$

$$=-\overline{b}+\frac{2 t}{3} \overline{a}+\frac{t}{3} \overline{b}$$

$$=\frac{2 t}{3} \overline{a}+\left(\frac{t}{3}-1\right) \overline{b} \quad \cdots \cdots ④$$

よって③、④より、

$$\frac{3 s}{8} \overline{a}-\frac{2 t}{3} \overline{b} \quad \cdots \cdots ⑤$$

$$-s \overline{a}+\frac{t}{3}-1 \quad \cdots \cdots ⑥$$

⑤より、

$$9 s=16 t \Leftrightarrow t=\frac{9}{16} s$$

よってこのことと⑥より、

$$-s=\frac{3}{16} s-1 \Leftrightarrow s=\frac{16}{19}$$

よって、 $t=\frac{9}{16} s=\frac{9}{19}$ となるので、

$$\overline{BP}=t \overline{BE}$$

$$=\frac{9}{19} \overline{BE}$$

$$=\frac{6}{19} \overline{a}+\frac{3}{19} \overline{b}$$

(v)

(ト)

(iv)の結果より、

$$\triangle BPC=t \cdot \triangle BCE$$

$$=t \cdot \frac{1}{3} \cdot \triangle ABC$$

$$=\frac{9}{19} \cdot \frac{1}{3} \cdot \triangle ABC$$

(i)より、 $\triangle ABC=3 \sqrt{3}$ なので、

$$\triangle BPC=\frac{9}{19} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \sqrt{3}=\frac{9 \sqrt{3}}{19}$$

【2】

(1)

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -a+3c & -b+3d \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$XA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & a+3b \\ c-d & c+3d \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{2}$$

よって $AX=XA$ より, ①と②の各項を比較して,

$$\begin{cases} a+c=a-b \\ b+d=a+3b \\ -a+3c=c-d \\ -b+3d=c+3d \end{cases}$$

ゆえに,

$$c=-b$$

$$d=a+2b$$

よって, 行列 X は次のように表される。

$$(\text{答}) \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a+2b \end{pmatrix}$$

(2)

$$X = mA + nE = \begin{pmatrix} m & m \\ -m & 3m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+n & m \\ -m & 3m+n \end{pmatrix}$$

より, (1)の結果とあわせて

$$\begin{cases} a=m+n \\ b=m \\ a+2b=3m+n \end{cases}$$

ゆえに,

$$\begin{cases} m=b \\ n=a-m=a-b \end{cases}$$

$$(\text{答}) \quad m=b, n=a-b$$

(3)

行列 X についてケーリー・ハミルトンの定理を適用すると,

$$X^2 - (2a+2b)X + (a^2+2ab+b^2)E = O$$

$$\Leftrightarrow X^2 = 2(a+b)X - (a+b)^2 E$$

となる。 $X^2 = sX + tE$ より,

$$sX + tE = 2(a+b)X - (a+b)^2 E$$

$$\Leftrightarrow \{2(a+b) - s\}X = \{t + (a+b)^2\}E$$

となるが, $b \neq 0$ より X は E の定数倍ではないから,

$$\begin{cases} s = 2(a+b) \\ t = -(a+b)^2 \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad s = 2(a+b), t = -(a+b)^2$$

(4)

$X^2 = 2(a+b)X - (a+b)^2 E$, $X = mA + nE = bA + (a-b)E$ なので,

$$X^3 = X^2 \cdot X$$

$$= 2(a+b)X^2 - (a+b)^2 X$$

$$= 2(a+b)\{2(a+b)X - (a+b)^2 E\} - (a+b)^2 X$$

$$= 3(a+b)^2 X - 2(a+b)^3 E$$

$$= (a+b)^2 \{3bA + (a-5b)E\}$$

よってこれを $X^3 = A$ に代入して,

$$(a+b)^2 \{3bA + (a-5b)E\} = A$$

$$\Leftrightarrow \{3b(a+b)^2 - 1\}A = -(a+b)^2(a-5b)E$$

A は E の実数倍(0を除く)でないから,

$$3b(a+b)^2 - 1 = 0 \text{ かつ } (a+b)^2(a-5b) = 0$$

$$\therefore a = \frac{5}{\sqrt[3]{4}}, b = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

ゆえに, 行列 X は次のようになる。

$$(\text{答}) \quad X = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt[3]{4}} & \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \\ -\frac{1}{\sqrt[3]{4}} & \frac{7}{\sqrt[3]{4}} \end{pmatrix}$$

【3】

(1)

$$f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - a^2) \text{ を微分して,}$$

$$f'(x) = 2x \cdot (x^2 - a^2) + (x^2 - 1) \cdot 2x$$

$$= 4x \cdot \left(x^2 - \frac{a^2 + 1}{2} \right)$$

このことから,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x \cdot \left(x^2 - \frac{a^2 + 1}{2} \right) = 0 \quad \therefore x = 0, \pm \sqrt{\frac{a^2 + 1}{2}}$$

よって, $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	$-\sqrt{\frac{a^2+1}{2}}$	...	0	...	$\sqrt{\frac{a^2+1}{2}}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

ここで,

$$f\left(\pm\sqrt{\frac{a^2+1}{2}}\right) = -\frac{(a^2-1)^2}{4}$$

また,

$$f(0) = a^2$$

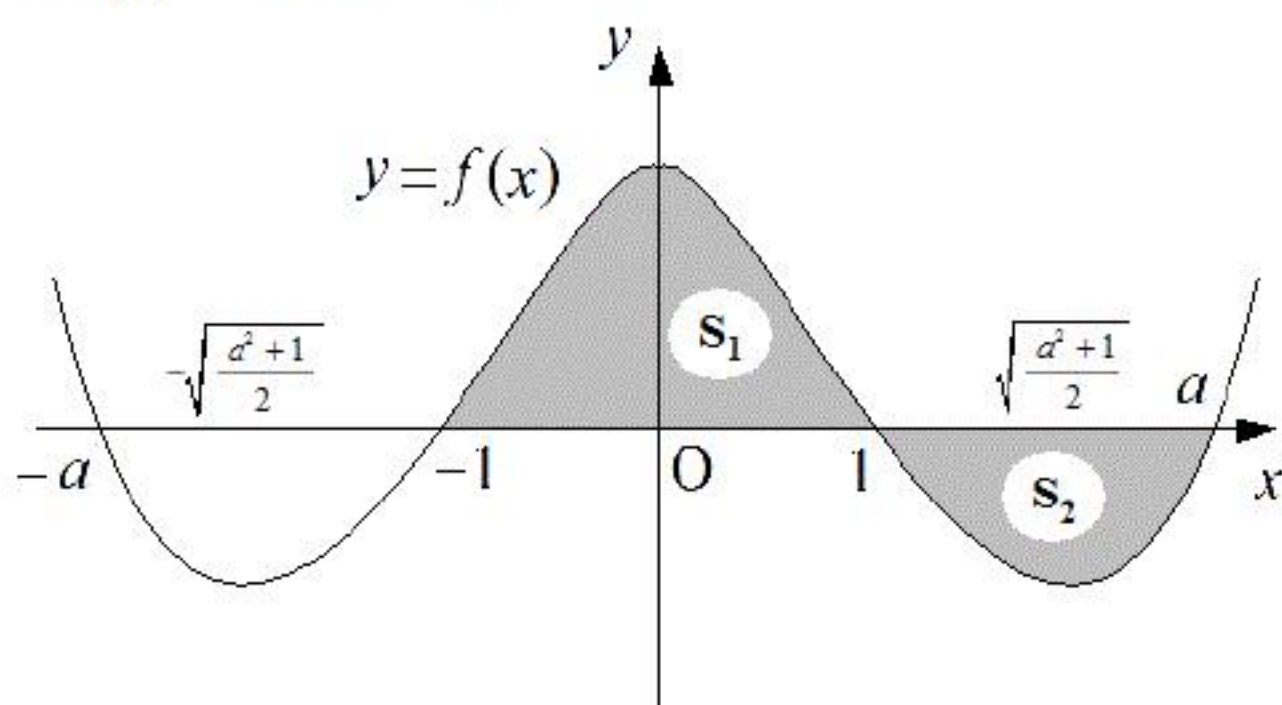
以上より $f(x)$ の極値は

$$(\text{答}) x = \pm\sqrt{\frac{a^2+1}{2}} \text{ の時, 極小値 } -\frac{(a^2-1)^2}{4}, x=0 \text{ の時, 極大値 } a^2$$

(2)

$f(x) = (x+1)(x-1)(x+a)(x-a)$ より, $f(x)$ は x 軸と $x = \pm 1, \pm a$ においてのみ交わる。

また, $1 < a$ より $1 < \sqrt{\frac{a^2+1}{2}} < a$ である。

ゆえに, $f(x)$ の概形は下図のようになる。よって S_1 の面積は,

$$S_1 = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

$$= \int_{-1}^1 \{ x^4 - (a^2 + 1)x^2 + a^2 \} dx$$

$$= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{a^2+1}{3}x^3 + a^2x \right]_{-1}^1$$

$$= \frac{20a^2 - 4}{15}$$

 S_2 の面積は,

$$S_2 = -\int_1^a f(x) dx$$

$$= -\int_1^a \{ x^4 - (a^2 + 1)x^2 + a^2 \} dx$$

$$= -\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{a^2+1}{3}x^3 + a^2x \right]_1^a$$

$$= \frac{2a^5 - 10a^3 + 10a^2 - 2}{15}$$

$$(\text{答}) S_1 = \frac{20a^2 - 4}{15}, S_2 = \frac{2a^5 - 10a^3 + 10a^2 - 2}{15}$$

(3)

$11S_2 = 19S_1$ より, (2)の結果とあわせて,

$$11 \cdot \frac{2a^5 - 10a^3 + 10a^2 - 2}{15} = 19 \cdot \frac{20a^2 - 4}{15}$$

$$\Leftrightarrow (a-3)(11a^4 + 33a^3 + 44a^2 - 3a - 9) = 0 \quad (a > 1)$$

ここで, $h(a) = 11a^4 + 33a^3 + 44a^2 - 3a - 9$ とおくと,

$$h'(a) = 44a^3 + 132a^2 + 88a - 3$$

$$h''(a) = 132a^2 + 264a + 88$$

$$= 22 \left\{ 6 \left(a + \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{5}{8} \right\} > 0$$

したがって, $h'(a)$ は単調増加関数だから, $h'(a) > h'(1) = 363 > 0$ となる。

よって, $h(a)$ は単調増加関数で, $h(a) > h(1) = 76 > 0$ となるから, $h(a) = 0$ を満たす a は存在しない。

ゆえに, $11S_2 = 19S_1$ を満たす a の値は $a = 3$ のみである。

(答) $a = 3$