

【1】

(1)

$$(ア) \ 4t^3 - 6t^2 - 9t \quad (イ) \ \frac{2}{3}\pi \quad (ウ) \ \frac{5}{2} \quad (エ) \ 0 \quad (オ) \ -11$$

(2)

$$(カ) \ \frac{8}{3} \quad (キ) \ \frac{5}{6}x - \frac{3}{2} \quad (ク) \ \frac{2\sqrt{61}}{3} \quad (ケ) \ 1$$

(3)

$$(コ) \ \frac{3}{14} \quad (サ) \ \frac{3}{35} \quad (シ) \ \frac{8}{35} \quad (ス) \ \frac{3}{5}$$

【解説】

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= 6\sin^2 x + 2\cos x \cos 2x - 7\cos x - 6 \\ &= 6(1 - \cos^2 x) + 2\cos x(2\cos^2 x - 1) - 7\cos x - 6 \\ &= 4\cos^3 x - 6\cos^2 x - 9\cos x \\ &= 4t^3 - 6t^2 - 9t \end{aligned}$$

ここで、 $g(t) = 4t^3 - 6t^2 - 9t$ とおく。 $0 \leq x \leq \pi$ のとき、 $-1 \leq t \leq 1$ なので、この範囲における $g(t)$ の最大値と最小値を求めれば良い。

$$\begin{aligned} g'(t) &= 12t^2 - 12t - 9 \\ &= (2t+1)(6t-9) \end{aligned}$$

であるから、 $-1 \leq t \leq 1$ における増減表は次のようになる。

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	-1	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	-11

増減表より、 $f(x) = g(t)$ は

$t = -\frac{1}{2}$ のとき、すなわち $x = \frac{2}{3}\pi$ のとき最大値 $\frac{5}{2}$ をとり、

$t = 1$ のとき、すなわち $x = 0$ のとき最小値 -11 をとることが分かる。

(2)

双曲線 $C: \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$ が、点 $A(5, a)$ を通るので、

$$\frac{25}{9} - \frac{a^2}{4} = 1 \Leftrightarrow a = \pm \frac{8}{3}$$

となる。ここで、点 A は第 1 象限内の点であることを考慮すると、 $a = \frac{8}{3}$ である。

また、双曲線 C の接線 l の方程式は

$$\frac{5}{3^2}x - \frac{\frac{8}{3}}{2^2}y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{5}{6}x - \frac{3}{2}$$

である。これと、 $y = \frac{2}{3}x$ 、 $y = -\frac{2}{3}x$ との交点の座標を求めると、

点 $P(9, 6)$ 、点 $Q\left(1, -\frac{2}{3}\right)$ となるので、

$$AP = \sqrt{(9-5)^2 + \left(6 - \frac{8}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{61}}{3}$$

$$AQ = \sqrt{(1-5)^2 + \left(-\frac{2}{3} - \frac{8}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{61}}{3}$$

を得る。以上より

$$\frac{AP}{AQ} = 1$$

である。

(3)

(i)

8 枚のカードから 4 枚を取り出す方法は、全部で ${}_8C_4 = 70$ 通りである。

緑のカード以外から 4 枚取り出す方法は、 ${}_6C_4 = 15$ 通りあるので、求める確率は

$$\frac{15}{70} = \frac{3}{14}$$

である。

(ii)

取り出す 2 色を決めると、取り出す 4 枚のカードは 1 通りに定まる。

取り出す 2 色の選び方は、 ${}_4C_2 = 6$ 通りあるので、求める確率は

$$\frac{6}{70} = \frac{3}{35}$$

である。

(iii)

取り出す 4 色は、赤、青、黄、緑の 1 通りに定まる。

各色について、取り出すカードは 2 通りあるので、求める確率は

$$\frac{2^4}{70} = \frac{8}{35}$$

である。

(iv)

[1] 並べたものが 2 色からなるとき

例えば、赤、赤、青、青の 4 枚を取り出した場合、並べ方は全部で $\frac{4!}{2!2!} = 6$ 通りある。

そのうち、同じ色のカードが隣り合わないような並べ方は

(赤、青、赤、青)、(青、赤、青、赤)

の 2 通りあるので、このように並ぶ確率は

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

である。

[2] 並べたものが 3 色からなるとき

例えば、赤、赤、青、黄の 4 枚を取り出した場合、並べ方は全部で $\frac{4!}{2!} = 12$ 通りある。

そのうち、同じ色のカードが隣り合わないような並べ方は

(赤、青、赤、黄)、(赤、黄、赤、青)、(赤、青、黄、赤)、(赤、黄、青、赤)

(青、赤、黄、赤)、(黄、赤、青、赤)

の 6 通りあるので、このように並ぶ確率は

$$\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

である。

[3] 並べたものが 4 色からなるとき

同じ色のカードが含まれないので、必ず同じ色のカードは隣り合わない。

以上より、求める確率は、(ii)(iii)の答を考慮して

$$\frac{3}{35} \cdot \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{3}{35} - \frac{8}{35}\right) \cdot \frac{1}{2} + \frac{8}{35} = \frac{3}{5}$$

である。

【2】

(1)

題意より、任意の実数 k, l に対して

$$A \begin{pmatrix} 2k \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10k \\ 5k \end{pmatrix} \quad \text{かつ} \quad A \begin{pmatrix} l \\ -l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2l \\ -2l \end{pmatrix}$$

が成り立つ。 $k=0, l=0$ のときに上式が成り立つのは明らかなので、

以下、 $k \neq 0, l \neq 0$ のときを考える。すると、上式は

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{かつ} \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

と変形できる。ここで、

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

であるから、

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(2)

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

だから、

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(3)

題意より

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つ。また、(2)の答より

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \cdot 5^n + 2^n & 2 \cdot 5^n - 2^{n+1} \\ 5^n - 2^n & 5^n + 2^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。以上より

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \cdot 5^n - \frac{2}{3} \cdot 2^n \\ \frac{1}{3} \cdot 5^n + \frac{2}{3} \cdot 2^n \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad p_n = \frac{2}{3} \cdot 5^n - \frac{2}{3} \cdot 2^n, \quad q_n = \frac{1}{3} \cdot 5^n + \frac{2}{3} \cdot 2^n$$

(4)

(3)の答より、

$$d_n = \sqrt{\left(\frac{2}{3} \cdot 5^n - \frac{2}{3} \cdot 2^n\right)^2 + \left(\frac{1}{3} \cdot 5^n + \frac{2}{3} \cdot 2^n\right)^2}$$

だから

$$\begin{aligned} \frac{d_{n+1}}{d_n} &= \sqrt{\frac{\left(\frac{2}{3} \cdot 5^{n+1} - \frac{2}{3} \cdot 2^{n+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} \cdot 5^{n+1} + \frac{2}{3} \cdot 2^{n+1}\right)^2}{\left(\frac{2}{3} \cdot 5^n - \frac{2}{3} \cdot 2^n\right)^2 + \left(\frac{1}{3} \cdot 5^n + \frac{2}{3} \cdot 2^n\right)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{\left\{\frac{2}{3} \cdot 5 - \frac{4}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}^2 + \left\{\frac{5}{3} + \frac{4}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}^2}{\left\{\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}^2 + \left\{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}^2}} \end{aligned}$$

となる。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ であることに注意すると、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = \sqrt{\frac{\frac{100}{9} + \frac{25}{9}}{\frac{4}{9} + \frac{1}{9}}} = 5$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = 5$$

【3】

(1)

$(x^2 - x)^n$ の最高次の項は x^{2n} であるから、 $f(x)$ の次数、および最高次の項の係数は

$\frac{d^n}{dx^n}(x^{2n})$ の次数、および係数に等しい。

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^{2n}) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(2nx^{2n-1}) = \cdots = 2n(2n-1)\cdots(n+1)x^n$$

であるから、 $f(x)$ は n 次の多項式であり、最高次の項の係数は $2n(2n-1)\cdots(n+1)$ である。

(答) $f(x)$ は n 次の多項式、最高次の項の係数は $2n(2n-1)\cdots(n+1)$

(2)

m が n より小さい自然数のとき、 $\frac{d^m}{dx^m}(x^2 - x)^n$ が $(x^2 - x)^{n-m}$ と m 次の多項式の積で表される

ことを数学的帰納法によって示す。

[1] $m=1$ のとき

$$\frac{d}{dx}(x^2 - x)^n = n(2x-1)(x^2 - x)^{n-1}$$

となり、確かに成り立つ。

[2] $m=k$ のとき成り立つと仮定し、 $m=k+1$ ($< n$) のとき

k 次の多項式 $P(x)$ を用いて

$$\frac{d^k}{dx^k}(x^2 - x)^n = P(x)(x^2 - x)^{n-k}$$

と表せるので、

$$\begin{aligned} \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(x^2 - x)^n &= \frac{d}{dx} \left\{ P(x)(x^2 - x)^{n-k} \right\} \\ &= P'(x)(x^2 - x)^{n-k} + (n-k)P(x)(2x-1)(x^2 - x)^{n-k-1} \\ &= \left\{ P'(x)(x^2 - x) + (n-k)P(x)(2x-1) \right\} (x^2 - x)^{n-(k+1)} \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\textcircled{1}$ の $\{ \}$ の中は $k+1$ 次の多項式だから、

命題は $m=k+1$ ($< n$) のときも成り立つ。

以上より、命題が成り立つことが示された。

(証明終)

(3)

部分積分をすると、

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)g(x)dx &= \left[\left\{ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2 - x)^n \right\} g(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \left\{ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2 - x)^n \right\} g'(x)dx \\ &= - \int_0^1 \left\{ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2 - x)^n \right\} g'(x)dx \end{aligned}$$

となる。もう 1 回部分積分をすると、

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)g(x)dx &= \left[- \left\{ \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^2 - x)^n \right\} g'(x) \right]_0^1 + (-1)^2 \int_0^1 \left\{ \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^2 - x)^n \right\} g^{(2)}(x)dx \\ &= (-1)^2 \int_0^1 \left\{ \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}(x^2 - x)^n \right\} g^{(2)}(x)dx \end{aligned}$$

となる。これを繰り返すと、

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = (-1)^n \int_0^1 (x^2 - x)^n g^{(n)}(x)dx$$

が得られる。

(証明終)

(4)

$n=4$ のとき、(3)の結果を用いると

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 (x^2 - x)^4 g^{(4)}(x)dx$$

が成り立つ。ここで、

$$\begin{aligned} g^{(4)}(x) &= \frac{d^4}{dx^4}(2x^5 - 5x^4) \\ &= \frac{d^3}{dx^3}(10x^4 - 20x^3) \\ &= \frac{d^2}{dx^2}(40x^3 - 60x^2) \\ &= \frac{d}{dx}(120x^2 - 120x) \\ &= 120(2x-1) \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)g(x)dx &= 120 \int_0^1 (x^2 - x)^4 (2x-1)dx \\ &= 120 \int_0^1 (x^2 - x)^4 (x^2 - x)' dx \\ &= 120 \left[\frac{1}{5} (x^2 - x)^5 \right]_0^1 = 0 \end{aligned}$$

である。

(答) $\int_0^1 f(x)g(x)dx = 0$