

【1】

〔解答〕

	(ア)	(イ)	(ウ)	(エ)
(1)	$\frac{3e^x}{(e^x+1)^2}$	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$-1 < y < 2$	$\log \frac{1+x}{2-x}$

	(オ)	(カ)	(キ)	(3)	(ク)	(ケ)	(コ)
(2)	12	$7110+222n$	6		$\left(\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right)$	$-5 \leq t \leq 5$	$\sqrt{10}$

	(サ)	(シ)	(ス)	(セ)
(4)	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}(2-\log 2)$

〔解説〕

(1)

$$y = \frac{2e^x - 1}{e^x + 1} \text{であるため,}$$
$$y' = \frac{2e^x \cdot (e^x + 1) - (2e^x - 1) \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{3e^x}{(e^x + 1)^2}$$

となる。また,

$$y'' = \frac{(e^x + 1)^2 \cdot 3e^x - 2(e^x + 1) \cdot e^x \cdot 3e^x}{(e^x + 1)^4} = \frac{-3e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^3}$$

となるので、変曲点は $e^x - 1 = 0$ 、つまり $x = 0$ のときである。ゆえに、変曲点の座標は、 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ となる。また、上の結果から関数は単調増加であり、

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x - 1}{e^x + 1} = -1,$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x - 1}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = 2$$

であることから、値域は、 $-1 < y < 2$ となる。
この関数の逆関数は、

$$\begin{aligned} x &= \frac{2e^y - 1}{e^y + 1} = 2 - \frac{3}{e^y + 1} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{e^y + 1} &= 2 - x \\ \Leftrightarrow e^y + 1 &= \frac{3}{2 - x} \\ \Leftrightarrow e^y &= \frac{1 + x}{2 - x} \\ \Leftrightarrow y &= \log \frac{1 + x}{2 - x} \end{aligned}$$

となる。

(2)

(i)

3000 より小さい数にするためには、千の位が2以下であればよい。よって、全部で

$$2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12 \text{ (個)}$$

できる。

(ii)

2000 より小さい数のとき、千の位は1である。よって、2000 以下の数は

$$123n, 12n3, 132n, 13n2, 1n23, 1n32$$

の6個である。この総和 S_n は、

$$S_n = 1000 \cdot 6 + (2 + 3 + n) \cdot (100 + 10 + 1) \cdot 2 = 7110 + 222n$$

となる。 $S_n = 8442$ となるのは、

$$7110 + 222n = 8442 \Leftrightarrow 222n = 1332 \Leftrightarrow n = 6$$

である。

(3)

(i)

$P(x, y)$ とおくと、

$$\overrightarrow{OA} = (1, 2), \quad \overrightarrow{AP} = (x - 1, y - 2)$$

となる。 $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{AP}$ が直交するので、

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AP} = x + 2y - 5 = 0$$

である。また、点 P は曲線 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上にあるため、連立方程式を解き、

$$(x, y) = \left(\frac{9}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

と求まる。

(ii)

$P(x, y)$ とおくと、

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = x + 2y = t$$

である。よって、 $x = -2y + t$ である。これを $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{(-2y + t)^2}{9} + \frac{y^2}{4} &= 1 \\ \Leftrightarrow 4(-2y + t)^2 + 9y^2 &= 36 \\ \Leftrightarrow 25y^2 - 16ty + 4t^2 - 36 &= 0 \end{aligned}$$

となる。したがって、この y の方程式が、実数解をもつ条件を求めればよく、判別式を D とおくと、求める t の範囲は

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 64t^2 - 25(4t^2 - 36) = -36t^2 + 25 \cdot 36 \geq 0 \\ \Leftrightarrow t^2 - 25 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow -5 \leq t &\leq 5 \end{aligned}$$

と求まる。

(iii)

この平面の図形を y 軸方向に $\frac{3}{2}$ 倍拡大すると、点 A は点 A'(1, 3) に移り、楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ は円 $x^2 + y^2 = 9$ に移される。円上の点 P' に対して、三角形 OAP' の面積が最大となるのは、 $OA' \perp OP'$ となるとときで、このとき、

$$\triangle OAP' = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2} \cdot 3 = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

となる。したがって、三角形 OAP の面積が最大になるのは、最大値を実現する三角形 OAP' を、 y 軸方向に $\frac{2}{3}$ 倍に縮小したときで、その面積は、

$$\frac{3\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \sqrt{10}$$

となる。

(4)

問題文より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-1)^2(x+2)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} \\ &= \frac{(A+C)x^2 + (A+B-2C)x - 2A+2B+C}{(x-1)^2(x+2)} \end{aligned}$$

となる。これが x についての恒等式になればよいから、係数を比較して、

$$A+C=0, A+B-2C=0, -2A+2B+C=1$$

となる。これを解き、 $A=-\frac{1}{9}, B=\frac{1}{3}, C=\frac{1}{9}$ とわかる。よって、

$$\begin{aligned} &\int_2^4 \frac{dx}{(x-1)^2(x+2)} \\ &= -\frac{1}{9} \int_2^4 \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3} \int_2^4 \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{9} \int_2^4 \frac{dx}{x+2} \\ &= -\frac{1}{9} [\log(x-1)]_2^4 + \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{x-1} \right]_2^4 + \frac{1}{9} [\log(x+2)]_2^4 \\ &= -\frac{1}{9} \log 3 + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \log \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{9} (2 - \log 2) \end{aligned}$$

とわかる。

【2】

(1)

A は逆行列をもたないので、

$$\begin{aligned}(3k+1)(2k+4)-(2-5k)(k-9) &= 11k^2-33k+22 \\ &= 11(k-1)(k-2) \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。条件より、 $k \neq 1$ であるため、 $k=2$ となる。

(答) $k=2$

(2)

$A = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$ であるため、ケーリー・ハミルトンの定理より、

$$A^2 - 15A = 0$$

となる。よって、

$$(E+A)^2 = E + 2A + A^2 = E + 2A + 15A = E + 17A$$

である。ゆえに、 $a_2 = 17$ となる。

(答) $a_2 = 17$

(3)

$$\begin{aligned}(E+A)^{n+1} &= (E+A)(E+A)^n \\ &= (E+A)(E+a_n A) \\ &= E + (a_n + 1)A + a_n A^2 \\ &= E + (16a_n + 1)A\end{aligned}$$

となることから、

$$a_{n+1} = 16a_n + 1$$

である。したがって、 $a_1 = 1$ を用いて、

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= 16a_n + 1 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} + \frac{1}{15} &= 16\left(a_n + \frac{1}{15}\right) \\ \Leftrightarrow a_n + \frac{1}{15} &= 16^{n-1}\left(a_1 + \frac{1}{15}\right) \\ \Leftrightarrow a_n &= 16^{n-1} \cdot \frac{16}{15} - \frac{1}{15} = \frac{1}{15}(16^n - 1)\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $a_{n+1} = 16a_n + 1$, $a_n = \frac{1}{15}(16^n - 1)$

【3】

(1)

C_2 について、 $y' = -2x$ であるから、 C_2 上の点 $(t, -t^2 + 1)$ における接線の方程式は、

$$y = -2t(x - t) + (-t^2 + 1) = -2tx + t^2 + 1$$

となる。これが、点A $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ を通るとすれば、座標を代入して、

$$\frac{1}{a} = -2ta + t^2 + 1 \Leftrightarrow t^2 - 2at + 1 - \frac{1}{a} = 0$$

が成り立つ。この方程式の判別式は

$$(-2a)^2 - 4\left(1 - \frac{1}{a}\right) = 4\left(a^2 + \frac{1}{a} - 1\right) > 0$$

となるから、常に2つの異なる実数解をもつ。その解を t_1, t_2 とすれば、2接線が直交することから、

$$(-2t_1) \cdot (-2t_2) = -1 \quad \therefore t_1 t_2 = -\frac{1}{4}$$

となるが、一方、解と係数の関係より、 $t_1 t_2 = 1 - \frac{1}{a}$ であるから、

$$-\frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{a} \quad \therefore a = \frac{4}{5}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \text{A} \left(\frac{4}{5}, \frac{5}{4} \right)$$

(2)

点Pにおける C_1 の接線 l_1 は、

$$y = -\frac{1}{p^2}(x - p) + \frac{1}{p} = -\frac{1}{p^2}x + \frac{2}{p}$$

である。同じ傾きをもつ C_2 の接線 l_2 の接点のx座標は

$$-2x = -\frac{1}{p^2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2p^2}$$

となるから、 C_2 の接線 l_2 は、

$$y = -\frac{1}{p^2}\left(x - \frac{1}{2p^2}\right) + 1 - \frac{1}{4p^4} = -\frac{1}{p^2}x + 1 + \frac{1}{4p^4}$$

である。

$$(\text{答}) \quad l_1: y = -\frac{1}{p^2}x + \frac{2}{p}, \quad l_2: y = -\frac{1}{p^2}x + 1 + \frac{1}{4p^4}$$

(3)

(2)で求めた、2つの接線 l_1, l_2 が一致する状況を考える。傾きは等しいので、切片が等しくなればよく、よって、

$$\frac{2}{p} = 1 + \frac{1}{4p^4} \Leftrightarrow 4p^4 - 8p^3 + 1 = 0$$

となるような $p > 0$ が2つ存在することを示せばよい。

$$f(p) = 4p^4 - 8p^3 + 1$$

とおくと、

$$f'(p) = 16p^3 - 24p^2 = 8p^2(2p - 3)$$

となるので、以下の増減表を得る。

p	0	...	$\frac{3}{2}$	...
$f'(p)$	0	-	0	+
$f(p)$	1	$\searrow$	$-\frac{23}{4}$	$\nearrow$

よって、 $f(2) = 1 > 0$ であることに注意すれば、 p は2つの実数解をもつことがわかる。

以上より、曲線 C_1 と C_2 は共通な接線を2つもつことが示された。

(証明終)