

【1】

【解答】

(1)	(ア) 2	(イ) 2	(ウ) $\frac{8}{3}$	(エ) $\frac{3}{10}$	(オ) $\frac{3}{10}$	(カ) $\frac{2}{5}$
(2)	(キ) $\frac{2}{3}$	(ク) $-\frac{32}{27}$	(ケ) $\frac{4}{3}$	(コ) $-\frac{32}{27} < k < 0$		(サ) $\frac{4}{3}$
(3)	(シ) 3	(ス) 4	(セ) $2-3^n$		(ソ) $2n-\frac{1}{2}(3^n-3)$	
(4)	(タ) $-2 < m < 2$		(チ) $\frac{\sqrt{2m^2+1}+3}{\sqrt{m^2+1}}$		(ツ) $\frac{-\sqrt{2m^2+1}+3}{\sqrt{m^2+1}}$	

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}\overline{BC} &= \overline{AD} \\ \overline{CP} &= \overline{CG} + \overline{GP} \\ &= \overline{CG} + \frac{1}{3}\overline{CG} \\ &= \frac{4}{3}\overline{CG} \\ &= \frac{4}{3}\overline{AE}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}2\overline{AP} &= 2(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CP}) \\ &= 2\left(\overline{AB} + \overline{AD} + \frac{4}{3}\overline{AE}\right) \\ &= 2\overline{AB} + 2\overline{AD} + \frac{8}{3}\overline{AE}\end{aligned}$$

となる。また、点Qは直線AP上にあるから実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overline{AQ} &= k\left(\overline{AB} + \overline{AD} + \frac{4}{3}\overline{AE}\right) \\ &= k\overline{AB} + k\overline{AD} + \frac{4}{3}k\overline{AE}\end{aligned}$$

と表され、さらに点Qは平面BDE上にあるから

$$k + k + \frac{4}{3}k = 1$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{3}{10}$$

となる。よって、

$$\overline{AQ} = \frac{3}{10}\overline{AB} + \frac{3}{10}\overline{AD} + \frac{2}{5}\overline{AE}$$

である。

(2)

(i)

$f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x$ であるとき

$$f'(x) = -3x^2 + 8x - 4$$

$$= -(3x-2)(x-2)$$

$$f''(x) = -6x + 8$$

$$= -2(3x-4)$$

となるから、関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	$\frac{2}{3}$	...	$\frac{4}{3}$	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	+	+	0	-
$f''(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f(x)$						0	

以上より、関数 $f(x)$ は $x = \frac{2}{3}$ で極小値 $f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{32}{27}$ をとり、曲線 $y = f(x)$ の変曲点の x 座標の値は $\frac{4}{3}$ である。

(ii)

方程式 $f(x) = k$ の解は、2つの関数 $y = f(x)$ 、 $y = k$ のグラフの共有点の x 座標にあたる。方程式 $f(x) = k$ の実数解の個数が3個となるような定数 k の値の範囲は、2つの関数 $y = f(x)$ 、 $y = k$ のグラフが異なる3個の共有点をもつような定数 k の値の範囲と一致し、(i)の増減表より

$$-\frac{32}{27} < k < 0$$

とわかる。

(iii)

$$f(x) = -x(x-2)^2$$

であるから

$$x < 0 \text{ のとき } f(x) > 0$$

$$x = 0, 2 \text{ のとき } f(x) = 0$$

$$0 < x < 2, 2 < x \text{ のとき } f(x) < 0$$

となる。よって、曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた面積は

$$\int_0^2 \{-f(x)\} dx = \int_0^2 (x^3 - 4x^2 + 4x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^2$$

$$= \frac{4}{3}$$

となる。

(3)

(i)

$a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n - 4n - 1 (n = 1, 2, 3, \dots)$ であるとき

$$a_2 = 3a_1 - 4 \cdot 1 - 1$$

$$= 1$$

となる。 $b_n = a_{n+1} - a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ とおくと

$$b_1 = a_2 - a_1$$

$$= -1$$

のもとで

$$b_n = a_{n+1} - a_n$$

$$= (3a_n - 4n - 1) - a_n$$

$$= 2a_n - 4n - 1$$

であり、また

$$b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1}$$

$$= \{3a_{n+1} - 4(n+1) - 1\} - a_{n+1}$$

$$= 2a_{n+1} - 4n - 5$$

$$= 2(3a_n - 4n - 1) - 4n - 5$$

$$= 6a_n - 12n - 7$$

であるから

$$b_{n+1} = 6a_n - 12n - 7$$

$$= 3(2a_n - 4n - 1) - 4$$

$$= 3b_n - 4$$

となる。よって

$$b_{n+1} = 3b_n - 4$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} - 2 = 3(b_n - 2)$$

$$\Leftrightarrow b_n - 2 = 3^{n-1} \cdot (-1 - 2)$$

$$\Leftrightarrow b_n = 2 - 3^n$$

である。

(ii)

(i)の結果より、 $n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)$$

$$= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

$$= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2 - 3^k)$$

$$= 2 + 2(n-1) - 3 \cdot \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1}$$

$$= 2n - \frac{1}{2}(3^n - 3)$$

となり、これは $n = 1$ のとき $a_1 = 2$ を満たすから

$$a_n = 2n - \frac{1}{2}(3^n - 3) (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となる。

(4)

(i)

$C: x^2 + 2y^2 = 2, l: y = mx + 3$ の共有点の x 座標は

$$x^2 + 2(mx + 3)^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow (2m^2 + 1)x^2 + 12mx + 16 = 0$$

の解である。方程式 $(2m^2 + 1)x^2 + 12mx + 16 = 0$ の判別式を D とおくと、 C, l が共有点をもたないとき

$$D < 0$$

$$\Leftrightarrow (6m)^2 - (2m^2 + 1) \cdot 16 < 0$$

$$\Leftrightarrow (m+2)(m-2) < 0$$

$$\Leftrightarrow -2 < m < 2$$

となる。

(ii)

C 上の点 P の座標は $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たす θ を用いて $P(\sqrt{2}\cos\theta, \sin\theta)$ とかけられるから、 P と l

の距離を d とおくと

$$d = \frac{|m \cdot \sqrt{2}\cos\theta - \sin\theta + 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}}$$

$$= \frac{|\sqrt{2m^2+1}\cos(\theta+\alpha)+3|}{\sqrt{m^2+1}}$$

となる。ただし、 α は

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}m}{\sqrt{2m^2+1}}, \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2m^2+1}}$$

を満たす実数である。 $-2 < m < 2$ であるとき

$$\sqrt{2m^2+1} < 3$$

となるから

$$-\sqrt{2m^2+1} \leq \sqrt{2m^2+1}\cos(\theta+\alpha) \leq \sqrt{2m^2+1}$$

$$\Leftrightarrow (0 <) 3 - \sqrt{2m^2+1} \leq \sqrt{2m^2+1}\cos(\theta+\alpha) + 3 \leq \sqrt{2m^2+1} + 3$$

$$\Leftrightarrow 3 - \sqrt{2m^2+1} \leq \left| \sqrt{2m^2+1}\cos(\theta+\alpha) + 3 \right| \leq \sqrt{2m^2+1} + 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 - \sqrt{2m^2+1}}{\sqrt{m^2+1}} \leq d \leq \frac{\sqrt{2m^2+1} + 3}{\sqrt{m^2+1}}$$

となる。

【2】

(1)

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換 f によって点 $(1, 1)$ が点 $(3, 3)$ に移るとき

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b=3-a \\ d=3-c \end{cases} \end{aligned}$$

となる。このとき

$$\begin{aligned} \det A &= ad - bc \\ &= a(3-c) - (3-a)c \\ &= 3(a-c) \\ &\neq 0 \quad (\because a \neq c) \end{aligned}$$

であるから、行列 A は逆行列 A^{-1} をもつことが示された。

(証明終)

(2)

(1)の結果より

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3(a-c)} \begin{pmatrix} -c+3 & a-3 \\ -c & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。行列 A^{-1} によって表される 1 次変換 f^{-1} が点 $(4, -1)$ を点 $(3, -2)$ に移すとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{3(a-c)} \begin{pmatrix} -c+3 & a-3 \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -a-4c+15 \\ -a-4c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 9a-9c \\ -6a+6c \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-c-3=0 \\ a-2c=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow (a, c) &= (2, 1) \end{aligned}$$

となるから、 $(b, d) = (1, 2)$ であり

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(3)

円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 P の座標は $0 \leq \theta < 2\pi$ であるような θ を用いて $(\cos \theta, \sin \theta)$ とおくことができ、このとき点 P が 1 次変換 f によって移された点 Q の座標 (X, Y) は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\cos \theta + \sin \theta \\ \cos \theta + 2\sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。2 つのベクトル $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ のなす角が $\frac{\pi}{6}$ であるとき

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} &= |\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}| \cos \frac{\pi}{6} \\ \Leftrightarrow \cos \theta (2\cos \theta + \sin \theta) + \sin \theta (\cos \theta + 2\sin \theta) \\ &= 1 \cdot \sqrt{(2\cos \theta + \sin \theta)^2 + (\cos \theta + 2\sin \theta)^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Leftrightarrow 2\cos^2 \theta + 2\sin^2 \theta + 2\cos \theta \sin \theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{5\cos^2 \theta + 5\sin^2 \theta + 8\cos \theta \sin \theta} \\ \Leftrightarrow 2 + \sin 2\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{5 + 4\sin 2\theta} \end{aligned}$$

となる。 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき $2 + \sin 2\theta > 0$ であるから

$$\begin{aligned} 2 + \sin 2\theta &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{5 + 4\sin 2\theta} \\ \Leftrightarrow (2 + \sin 2\theta)^2 &= \frac{3}{4} (5 + 4\sin 2\theta) \\ \Leftrightarrow 4\sin^2 2\theta + 4\sin 2\theta + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2\sin 2\theta + 1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin 2\theta &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

であり、 $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき $0 \leq 2\theta < 4\pi$ であるから

$$\begin{aligned} \sin 2\theta &= -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 2\theta &= \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi, \frac{19}{6}\pi, \frac{23}{6}\pi \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{7}{12}\pi, \frac{11}{12}\pi, \frac{19}{12}\pi, \frac{23}{12}\pi \end{aligned}$$

となる。よって、求める点 P の座標は

$$\begin{aligned} \theta = \frac{7}{12}\pi \text{ のとき } &\left(\cos \frac{7}{12}\pi, \sin \frac{7}{12}\pi \right) = \left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \right) \\ \theta = \frac{11}{12}\pi \text{ のとき } &\left(\cos \frac{11}{12}\pi, \sin \frac{11}{12}\pi \right) = \left(\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}, \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \right) \\ \theta = \frac{19}{12}\pi \text{ のとき } &\left(\cos \frac{19}{12}\pi, \sin \frac{19}{12}\pi \right) = \left(\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}, \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \right) \\ \theta = \frac{23}{12}\pi \text{ のとき } &\left(\cos \frac{23}{12}\pi, \sin \frac{23}{12}\pi \right) = \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \right) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \right), \left(\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}, \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \right), \left(\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}, \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \right), \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \right)$$

【3】

(1)

$0 < x < \pi$ のとき

$$\frac{3\cos x - 2}{\cos x - 1} = \frac{7}{3}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}\pi$$

である。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{2}{3}\pi$$

(2)

$$f(x) = \frac{3\cos x - 2}{\cos x - 1} \text{ とおくと}$$

$$f'(x) = \frac{-3\sin x(\cos x - 1) - (3\cos x - 2)(-\sin x)}{(\cos x - 1)^2}$$

$$= \frac{\sin x}{(\cos x - 1)^2}$$

となるから、 $0 < x < \pi$ において

$$f'(x) > 0$$

である。よって、関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	$\cdots$	π
$f'(x)$	$\nearrow$	$+$	$\nearrow$
$f(x)$		$\nearrow$	

さらに

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty, f(\pi) = \frac{5}{2}$$

であるから、 $y = f(x)$ のとり得る値の範囲は

$$y < \frac{5}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y < \frac{5}{2}$$

(3)

$$t = \tan \frac{x}{2} \text{ とおくと, } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ のとき}$$

$$0 < t < 1$$

$$\cdots \textcircled{1}$$

であるもとの

$$\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} - 1$$

$$= \frac{2}{1 + t^2} - 1$$

$$= \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\sin x = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$= 2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$= 2 \tan \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2t}{1 + t^2}$$

と表されるから

$$\frac{3\cos x - 2}{\cos x - 1} = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 \cdot \frac{1 - t^2}{1 + t^2} - 2}{\frac{1 - t^2}{1 + t^2} - 1} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5t^2 - 1}{2t^2} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\Leftrightarrow 5t^4 - 4t^3 + 4t^2 - 1 = 0$$

となる。ここで、 $g(t) = 5t^4 - 4t^3 + 4t^2 - 1$ とおくと

$$g'(t) = 20t^3 - 12t^2 + 8t$$

$$= 20t \left(t^2 - \frac{3}{5}t + \frac{2}{5} \right)$$

$$= 20t \left\{ \left(t - \frac{3}{10} \right)^2 + \frac{31}{100} \right\}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ のとき $g'(t) > 0$ となり、関数 $g(t)$ は単調増加関数である。よって

$$g(0) = -1 < 0$$

$$g(1) = 4 > 0$$

であるから、 $g(t) = 0$ を満たす t の値はただ 1 つ存在する。 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において $t = \tan \frac{x}{2}$ を満たす t の値と x の値は 1 対 1 対応するから、 $\frac{3\cos x - 2}{\cos x - 1} = \sin x$ を満たす実数 x の個数は 1 個であることが示された。

(証明終)