

【1】

[解答]

(1)	(i)	(ア) $\frac{5}{6}$	(イ) $\frac{1}{6}$	(ii)	(ウ) $\frac{1}{3}$	
(2)	(エ) 60	(オ) 720				
(3)	(カ) $\frac{3\sqrt{10}}{5}$	(キ) $\frac{\sqrt{10}}{5}$	(ク) $2\sqrt{10}$	(ケ) $-\frac{3\sqrt{10}}{5}$	(コ) $-\frac{\sqrt{10}}{5}$	(サ) $-2\sqrt{10}$
(4)	(i)	(シ) $\frac{1}{32}$	(ii)	(ス) $\frac{21}{32}$	(iii)	(セ) $\frac{5}{16}$
(5)	(ソ) 2^n+3	(タ) 534	(チ) 15			

[解説]

(1)

(i)

M は辺 AB の中点であるので

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}}{2}$$

となる。ON:NM=1:2 であるため

$$\overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}}{6}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NA} &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{ON} \\ &= \frac{5}{6}\overrightarrow{a} - \frac{1}{6}\overrightarrow{b}\end{aligned}$$

となる。

(ii)

$$\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{NA} = 0$$

であるので

$$\begin{aligned}\frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\overrightarrow{a} - \frac{1}{6}\overrightarrow{b} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 5|\overrightarrow{a}|^2 + 4\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} - |\overrightarrow{b}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} &= \frac{|\overrightarrow{b}|^2 - 5|\overrightarrow{a}|^2}{4}\end{aligned}$$

となる。ここで OA:OB=1:3 であるので $|\overrightarrow{a}|:|\overrightarrow{b}|=1:3$ となる。よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} &= \frac{9|\overrightarrow{a}|^2 - 5|\overrightarrow{a}|^2}{4} \\ &= |\overrightarrow{a}|^2\end{aligned}$$

となる。よって

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| |\overrightarrow{b}| \cos \theta$$

であるので

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| |\overrightarrow{b}|} \\ &= \frac{|\overrightarrow{a}|^2}{3|\overrightarrow{a}|^2} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる。

(2)

多項定理より x^4y^2 の項は

$$\frac{6!}{4!2!0!}(x)^4(2y)^2(3z)^0 = 60x^4y^2$$

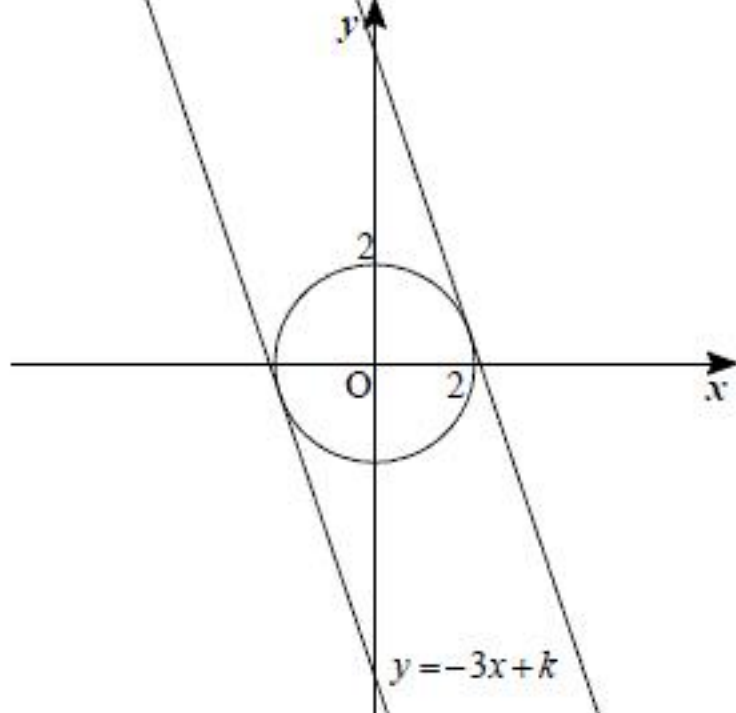
となる。また x^3y^2z の項は

$$\frac{6!}{3!2!1!}(x)^3(2y)^2(3z)^1 = 720x^3y^2z$$

となる。

(3)

$3x+y=k$ (k は実数) とおくと $y=-3x+k$ となる。このとき k が最大値または最小値となるのは下図のように直線 $y=-3x+k$ が円 $x^2+y^2=4$ に接するときである。



方程式 $x^2+y^2=4$ に方程式 $y=-3x+k$ を代入すると、

$$\begin{aligned}x^2 + (-3x+k)^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow 10x^2 - 6kx + k^2 - 4 &= 0\end{aligned}$$

となる。直線 $y=-3x+k$ が円 $x^2+y^2=4$ に接するとき、この方程式は重解をもつため、

$$\begin{aligned}(-3k)^2 - 10(k^2 - 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow k^2 &= 40 \\ \therefore k &= \pm 2\sqrt{10}\end{aligned}$$

となる。よって、 $3x+y$ は $k=2\sqrt{10}$ で最大値をとり、そのときの方程式の重解は、

$$x = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

となり、そのときの y の値は方程式 $y=-3x+k$ から

$$y = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

となる。従って、 $3x+y$ の最大値は $2\sqrt{10}$ であり、このとき $(x, y) = \left(\frac{3\sqrt{10}}{5}, \frac{\sqrt{10}}{5} \right)$ である。

同様に、 $3x+y$ の最小値は $-2\sqrt{10}$ であり、このとき $(x, y) = \left(-\frac{3\sqrt{10}}{5}, -\frac{\sqrt{10}}{5} \right)$ である。

(4)

(i)

取り出した 3 個の球の色が 1 種類となる場合は A, B, C 全てから白を取り出した場合であるので、求める確率は

$$\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$$

となる。

(ii)

取り出した 3 個の球の色が 3 種類となる場合は

- [1] A から赤, B から白, C から青を取り出した場合
- [2] A から赤, B から青, C から白を取り出した場合
- [3] A から白, B から青, C から赤を取り出した場合

のいずれかであるので取り出した 3 個の球の色が 3 種類となる確率は

$$\frac{2}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{5}{16}$$

となる。ここで取り出した 3 個の球の色が 2 種類となる場合の余事象は、取り出した 3 個の球の色が 1 種類となる場合と取り出した 3 個の球の色が 3 種類となる場合のいずれかであるので求める確率は

$$1 - \frac{1}{32} - \frac{5}{16} = \frac{21}{32}$$

となる。

(iii)

(ii) から求める確率は $\frac{5}{16}$ となる。

(5)

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= 2a_n - 3 \\ \Leftrightarrow (a_{n+1} - 3) &= 2(a_n - 3)\end{aligned}$$

となり $a_1=5$ より

$$\begin{aligned}a_n - 3 &= 2^n \\ \therefore a_n &= 2^n + 3\end{aligned}$$

となる。これより

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} + 3n \\ &= 2^{n+1} + 3n - 2\end{aligned}$$

となる。よって

$$S_5 = 512 + 24 - 2 = 534$$

となる。また

$$\begin{aligned}\frac{S_n}{3} &> n + 16666 \\ \Leftrightarrow \frac{2^{n+1} + 3n - 2}{3} &> n + 16666 \\ \Leftrightarrow 2^{n+1} &> 50000\end{aligned}$$

となるが、 n が整数であることから

$$n+1 \geq 16$$

となる。よって

$$n \geq 15$$

となる。

【2】

(1)

$$\begin{aligned} B^2 &= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad B^2 = \begin{pmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2)

ハミルトン・ケーリーの定理より

$$\begin{aligned} A^2 - (1+4)A + (1 \cdot 4 - 2 \cdot 2)E &= O \\ \therefore A^2 &= 5A \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} A^n &= 5^{n-1}A \\ &= \begin{pmatrix} 5^{n-1} & 2 \cdot 5^{n-1} \\ 2 \cdot 5^{n-1} & 4 \cdot 5^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A^n = \begin{pmatrix} 5^{n-1} & 2 \cdot 5^{n-1} \\ 2 \cdot 5^{n-1} & 4 \cdot 5^{n-1} \end{pmatrix}$$

(3)

二項定理から

$$(A-2B)^n = {}_n C_k A^k (-2B)^{n-k}$$

となる。ここで(1)から

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるため

$$(A-2B)^n = A^n + (-2B)^n$$

となる。(1)から $B^2 = 5B$ となるため

$$\begin{aligned} B^n &= 5^{n-1}B \\ &= \begin{pmatrix} 4 \cdot 5^{n-1} & -2 \cdot 5^{n-1} \\ -2 \cdot 5^{n-1} & 5^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} (A-2B)^n &= A^n + (-2B)^n \\ &= \begin{pmatrix} 5^{n-1} & 2 \cdot 5^{n-1} \\ 2 \cdot 5^{n-1} & 4 \cdot 5^{n-1} \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 4 \cdot (-10)^{n-1} & -2 \cdot (-10)^{n-1} \\ -2 \cdot (-10)^{n-1} & (-10)^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5^{n-1} - 8 \cdot (-10)^{n-1} & 2 \cdot 5^{n-1} + 4 \cdot (-10)^{n-1} \\ 2 \cdot 5^{n-1} + 4 \cdot (-10)^{n-1} & 4 \cdot 5^{n-1} - 2 \cdot (-10)^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (A-2B)^n = \begin{pmatrix} 5^{n-1} - 8 \cdot (-10)^{n-1} & 2 \cdot 5^{n-1} + 4 \cdot (-10)^{n-1} \\ 2 \cdot 5^{n-1} + 4 \cdot (-10)^{n-1} & 4 \cdot 5^{n-1} - 2 \cdot (-10)^{n-1} \end{pmatrix}$$

【3】

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x+1} \log x - \log(x+1) \frac{1}{x}}{(\log x)^2} \\ &= \frac{x \log x - (x+1) \log(x+1)}{x(x+1)(\log x)^2} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad f'(x) = \frac{x \log x - (x+1) \log(x+1)}{x(x+1)(\log x)^2}$$

(2)

$x > 1$ から

$$x \log x < (x+1) \log(x+1)$$

$$x(x+1)(\log x)^2 > 0$$

となるため

$$f'(x) < 0$$

となる。よって $f(x)$ は単調減少関数である。よって

$$f(x) > f(x+1) > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f(x+1)} > \frac{1}{f(x)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log(x+1)}{\log(x+2)} > \frac{\log x}{\log(x+1)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \log_{x+2}(x+1) > \log_{x+1} x > 0$$

となり $x = 2, 3, \dots, 8$ を代入することにより不等式

$$\log_3 2 < \log_4 3 < \log_5 4 < \log_6 5 < \log_7 6 < \log_8 7 < \log_9 8 < \log_{10} 9$$

が得られる。

(証明終)