【1】

【解答】

(1) ア　90°　　イ　1

(2) ウ　$2\pm\sqrt{13}$　　エ　$2-\sqrt{13}<a<\dfrac{4-\sqrt{37}}{2},\ \dfrac{4+\sqrt{37}}{2}<a<2+\sqrt{13}$

(3) オ　$\dfrac{4\sqrt{2}-2}{3}$　　カ　$\left(\sqrt{2},\ 2+2\sqrt{2}\right)$

(4) キ　4　　ク　7　　ケ　274

(5) コ　$\left(\dfrac{\pi}{2},\ -\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\pi+\dfrac{1}{2}\right)$　　サ　$\dfrac{1}{2}$

【解説】

(1)(i)

ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{DA}}, \overrightarrow{\mathrm{DB}}$の成分を計算すると,

$$\overrightarrow{\mathrm{DA}}=(1,0,0)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{DB}}=(0,3,0)$$

となる。したがって$\overrightarrow{\mathrm{DA}}, \overrightarrow{\mathrm{DB}}$の内積は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}}&=1\cdot0+0\cdot3+0\cdot0\\&=0\end{aligned}$$

となる。以上より, 直線DAと直線DBは直交し,

$$\theta=90^\circ$$

となる。

(ii)

3点A, B, Dは平面$z=3$上に存在するため, △ABDを底面とすると四面体ABCDの高さは

$$5-3=2$$

である。したがって, 求める体積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{DA}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{DB}}\right|\cdot2\cdot\frac{1}{3}&=\frac{1}{2}\cdot1\cdot3\cdot2\cdot\frac{1}{3}\\&=1\end{aligned}$$

である。

(2)

与えられた方程式$x^2-2x\log_2\{(a+1)(a-5)\}+4=0$に$x=2$を代入すると,

$$\begin{aligned}&4-4\log_2\{(a+1)(a-5)\}+4=0\\&\Leftrightarrow\log_2\{(a+1)(a-5)\}=2\\&\Leftrightarrow(a+1)(a-5)=4\\&\Leftrightarrow a^2-4a-9=0\\&\therefore a=2\pm\sqrt{13}\end{aligned}$$

となる。また, 与えられた方程式の判別式をDとすると,

$$\begin{aligned}&\frac{D}{4}=\left[\log_2\{(a+1)(a-5)\}\right]^2-4<0\\&\Leftrightarrow-2<\log_2\{(a+1)(a-5)\}<2\\&\Leftrightarrow\frac{1}{4}<(a+1)(a-5)<4\end{aligned}$$

となる。この不等式の右側と左側をそれぞれ変形すると,

$$\begin{aligned}&(a+1)(a-5)<4\\&\Leftrightarrow a^2-4a-9<0\\&\Leftrightarrow2-\sqrt{13}<a<2+\sqrt{13}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(a+1)(a-5)>\frac{1}{4}\\&\Leftrightarrow a^2-4a-\frac{21}{4}>0\\&\Leftrightarrow a<\frac{4-\sqrt{37}}{2},\ a>\frac{4+\sqrt{37}}{2}\end{aligned}$$

となる。

$$2+\sqrt{13}=\frac{4+\sqrt{52}}{2}>\frac{4+\sqrt{37}}{2}$$
$$2-\sqrt{13}=\frac{4-\sqrt{52}}{2}<\frac{4-\sqrt{37}}{2}$$

となるため, 求めるaの範囲は,

$$2-\sqrt{13}<a<\frac{4-\sqrt{37}}{2},\ \frac{4+\sqrt{37}}{2}<a<2+\sqrt{13}$$

となる。

(3)

与えられた不等式より,

$$2x+2\leqq\frac{4}{3}y$$
$$\Leftrightarrow y\geqq\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$$

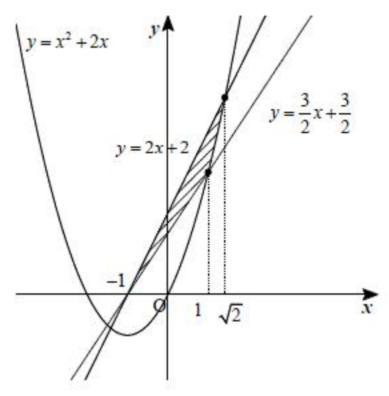
となる。放物線$y=x^2+2x$と直線$y=\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$の交点の$x$座標を計算すると,

$$\begin{aligned}&x^2+2x=\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}\\&\Leftrightarrow2x^2+x-3=0\\&\Leftrightarrow(2x+3)(x-1)=0\\&\therefore x=-\frac{3}{2},1\end{aligned}$$

となる。放物線$y=x^2+2x$と直線$y=2x+2$の交点のx座標を計算すると,

$$\begin{aligned}&x^2+2x=2x+2\\&\Leftrightarrow x^2-2=0\\&\therefore x=\pm\sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。以上より, $x^2+2x\leqq y\leqq2x+2\leqq\frac{4}{3}y$の表す領域は以下の図の斜線部である。



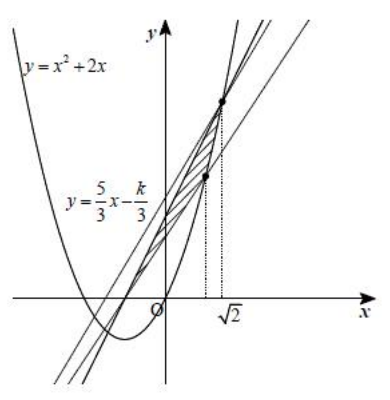
前図より, 求める面積は,

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1}\left\{(2x+2)-\left(\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}\right)\right\}dx+\int_{1}^{\sqrt{2}}\left\{(2x+2)-\left(x^2+2x\right)\right\}dx\\&=\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)dx+\int_{1}^{\sqrt{2}}\left(-x^2+2\right)dx\\&=\left[\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x\right]_{-1}^{1}+\left[-\frac{1}{3}x^3+2x\right]_{1}^{\sqrt{2}}\\&=1+\frac{4\sqrt{2}-5}{3}\\&=\frac{4\sqrt{2}-2}{3}\end{aligned}$$

となる。$5x-3y=k$とすると,

$$y=\frac{5}{3}x-\frac{k}{3}$$

となる。したがって, 直線$y=\frac{5}{3}x-\frac{k}{3}$が領域と交わった状態での$y$切片が最も大きいときを考えればよい。直線の傾きを比較すると, 下図より, y切片が最も大きくなるのは直線$y=\frac{5}{3}x-\frac{k}{3}$が点$\left(\sqrt{2},\ 2+2\sqrt{2}\right)$を通るときである。



以上より, $5x-3y$が最小となるような座標は$\left(\sqrt{2},\ 2+2\sqrt{2}\right)$である。

(4)(i)

$n=3$のとき, 全て1段ずつ登る, 1段登った後一度に2段登る, 一度に2段登った後1段登る, 一度に3段登るという4通りの登り方がある。したがって

$$a_3=4$$

である。

(ii)

$n=4$のとき, 1段登った後一度に3段登る, 2段登った後一度に2段登る, 3段登った後1段登るという登り方がある。したがって,

$$\begin{aligned}a_4&=a_1+a_2+a_3\\&=1+2+4\\&=7\end{aligned}$$

となる。

(iii)

(ii)と同様の計算を行うと,

$$\begin{aligned}a_5&=a_2+a_3+a_4\\&=2+4+7\\&=13\\a_6&=a_3+a_4+a_5\\&=4+7+13\\&=24\\a_7&=a_4+a_5+a_6\\&=7+13+24\\&=44\\a_8&=a_5+a_6+a_7\\&=13+24+44\\&=81\\a_9&=a_6+a_7+a_8\\&=24+44+81\\&=149\\a_{10}&=a_7+a_8+a_9\\&=44+81+149\\&=274\end{aligned}$$

となる。

(5)(i)

$y=\sin x$の両辺をxについて微分すると,

$$y'=\cos x$$

となる。したがって, $0<t<\frac{\pi}{2}$における直線lの方程式は

$$\begin{aligned}y&=-\frac{1}{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}\left(x-t-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\\&=\frac{1}{\sin t}\left(x-t-\frac{\pi}{2}\right)+\cos t\end{aligned}$$

となる。以上より, $t=\frac{\pi}{3}$のとき

$$\begin{aligned}\sin t&=\sin\frac{\pi}{3}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos t&=\cos\frac{\pi}{3}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

となるため, lの方程式に$x=\frac{\pi}{2}$を代入すると,

$$\begin{aligned}y&=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\pi\right)+\frac{1}{2}\\&=-\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

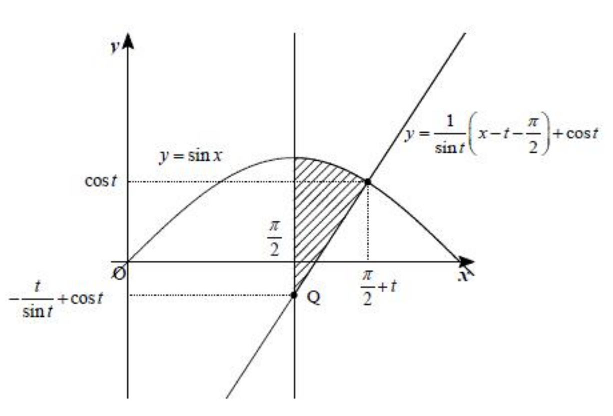
となる。したがって, 点Qの座標は

$$\mathrm{Q}\left(\frac{\pi}{2},\ -\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi+\frac{1}{2}\right)$$

である。

(ii)

求める面積は下図の斜線部の面積である。



したがって, 求める面積は

$$\begin{aligned}S(t)&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+t}\left\{\sin x-\left(\frac{1}{\sin t}x-\frac{2t+\pi}{2\sin t}+\cos t\right)\right\}dx\\&=\left[-\cos x-\frac{1}{2\sin t}x^2+\left(\frac{2t+\pi}{2\sin t}-\cos t\right)x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+t}\\&=\sin t-\frac{1}{2\sin t}\left(t^2+\pi t\right)+\left(\frac{2t+\pi}{2\sin t}-\cos t\right)t\\&=\sin t-t\cos t+\frac{t^2}{2\sin t}\end{aligned}$$

となり,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+0}\frac{S(t)}{t}&=\lim_{t\to+0}\left(\frac{\sin t}{t}-\cos t+\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{\sin t}\right)\\&=1-1+\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。

【2】

(1)

A^{n+1} を計算すると，

$$A^{n+1}=A^nA$$
$$\Leftrightarrow A^{n+1}=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_na_1+b_nc_1 & a_nb_1+b_nd_1 \\ c_na_1+d_nc_1 & c_nb_1+d_nd_1 \end{pmatrix} \quad ・・・①$$

となる。また，

$$A^{n+1}=AA^n$$
$$\Leftrightarrow A^{n+1}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1a_n+b_1c_n & a_1b_n+b_1d_n \\ c_1a_n+d_1c_n & c_1b_n+d_1d_n \end{pmatrix} \quad ・・・②$$

となる。したがって，①と②で成分を比較して

$$b_{n+1}=b_1a_n+d_1b_n$$
$$b_{n+1}=a_1b_n+b_1d_n$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ より，①に $a_1=\frac{1}{3},\ b_1=7,\ c_1=0,\ d_1=3$ を代入すると

$$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n \quad ・・・③$$
$$b_{n+1}=7a_n+3b_n \quad ・・・④$$
$$c_{n+1}=\frac{1}{3}c_n \quad ・・・⑤$$
$$d_{n+1}=7c_n+3d_n \quad ・・・⑥$$

が得られる。③より数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1=\frac{1}{3}$，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから $a_n=\frac{1}{3^n}$ である。また，⑤より数列 $\{c_n\}$ は初項 $c_1=0$，公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから $c_n=0$ である。このとき，⑥より

$$d_{n+1}=3d_n$$

が成り立つので，数列 $\{d_n\}$ が初項 $d_1=3$，公比 3 の等比数列であることより $d_n=3^n$ である。ここで，(1)の結果より，④および

$$b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n+7d_n \quad ・・・⑦$$

が成り立つので，④と⑦より

$$7a_n+3b_n=\frac{1}{3}b_n+7d_n$$
$$\Leftrightarrow \frac{8}{3}b_n=7(d_n-a_n)$$
$$\Leftrightarrow b_n=\frac{21}{8}\left(3^n-\frac{1}{3^n}\right)$$

が得られる。以上より，

$$A^n=\begin{pmatrix} \frac{1}{3^n} & \frac{21}{8}\left(3^n-\frac{1}{3^n}\right) \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

となる。

(答) $A^n=\begin{pmatrix} \frac{1}{3^n} & \frac{21}{8}\left(3^n-\frac{1}{3^n}\right) \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

(3)

$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ を計算すると，

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \frac{1}{3^n} & \frac{21}{8}\left(3^n-\frac{1}{3^n}\right) \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \frac{2}{3^n}+\frac{105}{8}\left(3^n-\frac{1}{3^n}\right) \\ 5\cdot 3^n \end{pmatrix}$$

となるため，

$$\frac{q_n}{p_n}=\frac{5\cdot 3^n}{\frac{2}{3^n}+\frac{105}{8}\left(3^n-\frac{1}{3^n}\right)}$$
$$=\frac{5}{\frac{2}{3^{2n}}+\frac{105}{8}\left(1-\frac{1}{3^{2n}}\right)}$$

となる。この式の $n\to\infty$ での極限をとると，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{p_n}=\frac{5}{0+\frac{105}{8}(1-0)}$$
$$=\frac{8}{21}$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{\sqrt{{p_n}^2+{q_n}^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{q_n}{p_n}\right)^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{8}{21}\right)^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{505}{441}}}$$
$$=\frac{21}{\sqrt{505}}$$
$$=\frac{21\sqrt{505}}{505}$$

となる。

(答) $\frac{21\sqrt{505}}{505}$

【3】

(1)

$y=\log x$ の両辺を x について微分すると,

$$y'=\frac{1}{x}$$

となるため接線 l の方程式は,

$$\begin{aligned} y&=\frac{1}{a}(x-a)+\log a\\ &=\frac{1}{a}x-1+\log a \end{aligned}$$

となる。

(答) $y=\frac{1}{a}x-1+\log a$

(2)

l の方程式において $x=0$ とすると,

$$y=-1+\log a$$

となる。また, $y=0$ とすると,

$$\begin{aligned} &0=\frac{1}{a}x-1+\log a\\ &\Leftrightarrow x=a-a\log a \end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\mathrm{P}(a-a\log a,0),\ \mathrm{Q}(0,-1+\log a)$$

となる。 $0<a<e$ であるから,

$$\begin{aligned} &\log a<1\\ &\Leftrightarrow -1+\log a<0 \end{aligned}$$

である。以上より,

$$\begin{aligned} S(a)&=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\\ &=\frac{1}{2}\cdot a(1-\log a)(1-\log a)\\ &=\frac{a(1-\log a)^2}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{a(1-\log a)^2}{2}$

(3)

$S(a)$ の導関数を計算すると,

$$\begin{aligned} S'(a)&=\frac{(1-\log a)^2}{2}+\frac{a}{2}\cdot 2(1-\log a)\cdot\left(-\frac{1}{a}\right)\\ &=\frac{1}{2}(1-\log a)\{(1-\log a)-2\}\\ &=\frac{1}{2}(\log a-1)(\log a+1) \end{aligned}$$

となる。 $\log a$ は a に対して単調増加であるから, $S(a)$ の増減表は次のようになる。

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	e
S'		+	0	−	
S		↗	極大	↘	

以上より, $a=\frac{1}{e}$ のとき $S(a)$ は最大値

$$S\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{2}{e}$$

をとる。

(答) $a=\frac{1}{e}$, 最大値 $\frac{2}{e}$

(4)

法線 m の傾きは $-a$ であるから, 法線 m の方程式は

$$\begin{aligned} y&=-a(x-a)+\log a\\ &=-ax+a^2+\log a \end{aligned}$$

である。法線 m が $(e,0)$ を通るとき,

$$-ae+a^2+\log a=0 \qquad \cdots①$$

となる。したがって $0<a<e$ において①が成り立つ a がただ一つ存在すればよい。

$f(a)=-ae+a^2+\log a$ とすると,

$$\begin{aligned} f'(a)&=-e+2a+\frac{1}{a}\\ &=\frac{2a^2-ea+1}{a} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$2a^2-ea+1=2\left(a-\frac{e}{4}\right)^2+1-\frac{e^2}{8}$$

と平方完成すると, $e<2.8$ より $e^2<7.84(<8)$ であることから

$$1-\frac{e^2}{8}>0$$

となるので,

$$2a^2-ea+1>0$$

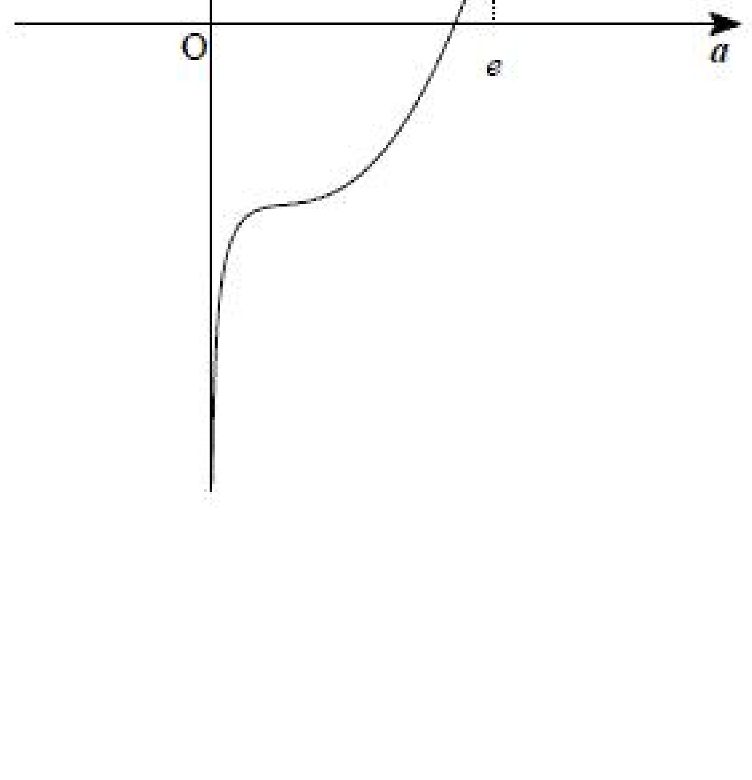
が成り立つ。したがって $a>0$ より

$$f'(a)>0$$

となり, $f(a)$ は単調増加関数である。また, $f(a)$ の極限を計算すると,

$$\begin{aligned} &\lim_{a\to+0}f(a)=-\infty\\ &\lim_{a\to e-0}f(a)=-e^2+e^2+1\\ &\qquad\qquad\quad =1 \end{aligned}$$

となる。以上より $y=f(a)$ グラフは以下の図のようになり, $0<a<e$ において $f(a)=0$ を満たす a はただ一つ存在するため, 題意が示された。



(証明終)