【1】

〔解答〕

(1)

(ア) $-\frac{3}{4} \leqq k < \frac{1}{4}$	(イ) $k = \frac{1}{4},\ k < -\frac{3}{4}$	(ウ) $\frac{4}{3}\pi$

(2)

(エ) $\frac{e^2}{3}$	(オ) $e^{\frac{2}{3}}x - \frac{5}{3}$

(3)

(カ) 23	(キ) $2^{n+1} - 2n - 1$	(ク) $2^{n+2} - n^2 - 2n - 4$

(4)

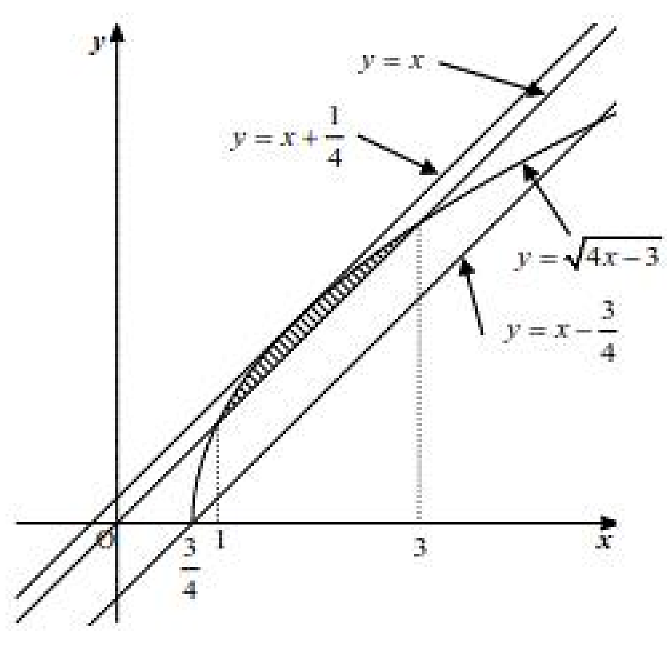
(ケ) $\frac{\sqrt{39}}{3}$	(コ) $\frac{2}{9}$	(サ) $\frac{5}{12}$	(シ) 15:13

(5)

(ス) $\frac{3}{16}$	(セ) $\frac{189}{2048}$

〔解説〕

(1)



$y = \sqrt{4x-3}$ と $y = x + k$ の交点の数を考えればよい。

$$\sqrt{4x-3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$$

より $y = \sqrt{4x-3}$ と x 軸の交点は $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ であり，$y = x + k$ が $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ を通るのは

$$0 = \frac{3}{4} + k \Leftrightarrow k = -\frac{3}{4}$$

のときである。また，$y = \sqrt{4x-3}$ と $y = x + k$ が接するのは，

$$4x - 3 = (x+k)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 + (2k-4)x + k^2 + 3 = 0$$

の判別式を D として $\frac{D}{4} = 0$ となるとき，すなわち

$$(k-2)^2 - (k^2+3) = 0$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{4}$$

のときである。以上より，求める実数解の個数が 2 個となるのは

$$-\frac{3}{4} \leqq k < \frac{1}{4}$$

のときであり，1 個となるのは

$$k = \frac{1}{4},\ k < -\frac{3}{4}$$

のときである。また，曲線 $y = \sqrt{4x-3}$ と直線 $y = x$ の交点の x 座標は

$$4x - 3 = x^2$$
$$\Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1, 3$$

であるから，求める体積は

$$\pi\int_1^3 (4x - 3 - x^2)dx = -\pi\int_1^3 (x-1)(x-3)dx$$
$$= \frac{\pi}{6}(3-1)^3$$
$$= \frac{4}{3}\pi$$

である。

(2)

$f(x) = kx^3 - 1,\ g(x) = \log x$ とおくと，

$$f'(x) = 3kx^2,\ g'(x) = \frac{1}{x}$$

である。共通の接線を持つ共有点を $(t, f(t))$ とおくと，

$$\begin{cases} f(t) = g(t) \\ f'(t) = g'(t) \end{cases}$$

が成り立つ。これを解くと，

$$\begin{cases} kt^3 - 1 = \log t \\ 3kt^2 = \frac{1}{t} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} - 1 = \log t \\ k = \frac{1}{3t^3} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = e^{-\frac{2}{3}} \\ k = \frac{e^2}{3} \end{cases}$$

を得る。また，共通の接線の方程式は，

$$y = g'(t)(x-t) + g(t)$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{e^{-\frac{2}{3}}}\left(x - e^{-\frac{2}{3}}\right) - \frac{2}{3}$$
$$\Leftrightarrow y = e^{\frac{2}{3}} - \frac{5}{3}$$

である。

(3)

$$a_2 = S_1 + 1^2 + 1$$
$$= a_1 + 2$$
$$= 3$$
$$S_2 = a_2 + a_1 = 4$$
$$a_3 = 4 + 2^2 + 1 = 9$$
$$S_3 = a_3 + a_2 + a_1 = 13$$

より，

$$a_4 = 13 + 3^2 + 1 = 23$$

である。また，$n \geqq 2$ のとき，

$$a_{n+1} - a_n = S_n + n^2 + 1 - \left\{S_{n-1} + (n-1)^2 + 1\right\}$$
$$= a_n + 2n - 1$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} = 2a_n + 2n - 1$$
$$\Leftrightarrow a_{n+1} + 2(n+1) + 1 = 2(a_n + 2n + 1)$$

であり，これは $n = 1$ のときも成立する。よって

$$b_n = a_n + 2n + 1$$

とおくと，数列 $\{b_n\}$ は初項が $b_1 = 1 + 2 + 1 = 4$，公比が 2 の等比数列であるから，

$$b_n = 2^{n+1}$$

であり，これより

$$2^{n+1} = a_n + 2n + 1$$
$$\Leftrightarrow a_n = 2^{n+1} - 2n - 1$$

と数列 $\{a_n\}$ の一般項が求まり，また，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(2^{k+1} - 2k - 1\right)$$
$$= \frac{2^2 - 2^{n+2}}{1-2} - n(n+1) - n$$
$$= 2^{n+2} - n^2 - 2n - 4$$

となる。

(4)

(i)

△ABC について余弦定理より，

$$\mathrm{BC}^2 = 3^2 + 4^2 - 2\cdot 3\cdot 4\cos\frac{\pi}{3} = 13$$
$$\therefore \mathrm{BC} = \sqrt{13}$$

であるから，求める外接円の半径を R とおくと，△ABC について正弦定理より，

$$\frac{\sqrt{13}}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2R$$
$$\therefore R = \frac{\sqrt{39}}{3}$$

となる。

(ii)

$$\left|\vec{b}\right| = 4,\ \left|\vec{c}\right| = 3,\ \vec{b}\cdot\vec{c} = 4\cdot 3\cdot\cos\frac{\pi}{3} = 6$$

である。

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = s\vec{b} + t\vec{c}$$

とおくと，外心 O は辺 AB に関して C と同じ側，また辺 AC に関して B と同じ側にあることから $s > 0,\ t > 0$ を満たし，

$$\overrightarrow{\mathrm{BO}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (s-1)\vec{b} + t\vec{c}$$

であり，また(i)の結果より，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AO}}\right|^2 = \frac{13}{3}$$
$$\Leftrightarrow s^2\left|\vec{b}\right|^2 + 2st\vec{b}\cdot\vec{c} + t^2\left|\vec{c}\right|^2 = \frac{13}{3}$$
$$\Leftrightarrow 9s^2 + 12st + 16t^2 = \frac{13}{3} \qquad \cdots ①$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BO}}\right|^2 = \frac{13}{3}$$
$$\Leftrightarrow (s-1)^2\left|\vec{b}\right|^2 + 2(s-1)t\vec{b}\cdot\vec{c} + t^2\left|\vec{c}\right|^2 = \frac{13}{3}$$
$$\Leftrightarrow 9(s-1)^2 + 12(s-1)t + 16t^2 = \frac{13}{3} \qquad \cdots ②$$

となるので，①－②より

$$9(2s-1) + 12t = 0$$
$$\Leftrightarrow s = \frac{9-12t}{18} \qquad \cdots ③$$

である。③を①に代入すると，

$$9\left(\frac{3-4t}{6}\right)^2 + 12\frac{3-4t}{6}t + 16t^2 = \frac{13}{3}$$
$$\Leftrightarrow t^2 = \frac{25}{144}$$
$$\therefore t = \frac{5}{12}\ (t > 0)$$

となり，このとき $s = \frac{2}{9}$ である。よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \frac{2}{9}\vec{b} + \frac{5}{12}\vec{c}$$

である。

(iii)

(ii)の結果より，

$$\overrightarrow{\mathrm{BO}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}} = -\frac{7}{9}\vec{b} + \frac{5}{12}\vec{c}$$

であるから，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BP}}$$
$$= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + k\overrightarrow{\mathrm{BO}}$$
$$= \left(1 - \frac{7}{9}k\right)\vec{b} + \frac{5}{12}k\vec{c}$$

と表せる。ここで，P は AC 上の点であるから，

$$1 - \frac{7}{9}k = 0$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{9}{7}$$

であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{15}{28}\vec{c}$$

となる。よって

$$\mathrm{AP} : \mathrm{PC} = \frac{15}{28} : \left(1 - \frac{15}{28}\right) = 15 : 13$$

である。

(5)

2 人が別々の食堂で食事をとった翌日に 2 人が一緒に食事をとるのは，X 君と Y さんが前日の食事でどちらも選んでいない食堂を選んだときであり，その確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

である。よって 3 日目にはじめて 2 人が一緒に食事をとる確率は，

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

である。また，2 人が同じ食堂で食事をとった翌日に再び 2 人が一緒に食事をとる確率は，

$$2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

であるから，k 日目（但し $2 \leqq k \leqq 6$）と 7 日目にのみ一緒に食事をとる確率を p_k とすると，

$$p_2 = \frac{1}{4}\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4} = \frac{27}{2048}$$
$$p_3 = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4} = \frac{27}{2048}$$
$$p_4 = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4} = \frac{27}{2048}$$
$$p_5 = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{4} = \frac{27}{2048}$$
$$p_6 = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{81}{2048}$$

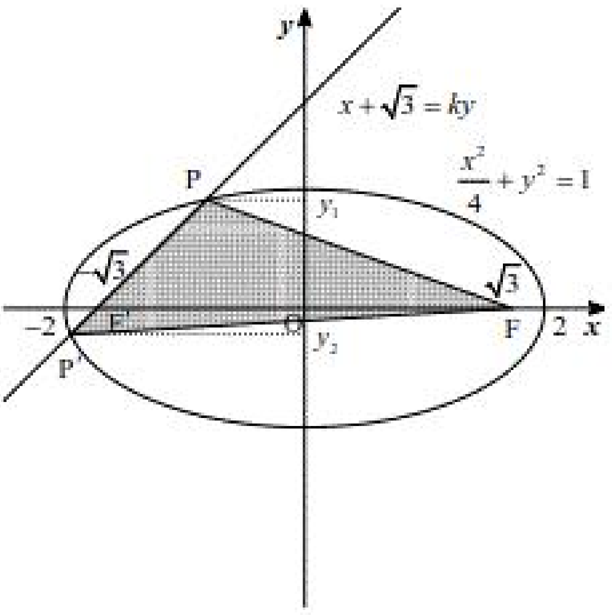
となるから，求める確率は

$$\frac{27}{2048} + \frac{27}{2048} + \frac{27}{2048} + \frac{27}{2048} + \frac{81}{2048} = \frac{189}{2048}$$

である。

【2】

(1)



$P(x_1, y_1), P'(x_2, y_2)$とおく。ここで，直線$x+\sqrt{3}=ky$は$k$の値に関わらず$x$軸と平行にはならないので，$y_1>y_2$として一般性を失わない。楕円の方程式に$x+\sqrt{3}=ky \Leftrightarrow x=ky-\sqrt{3}$を代入すると，

$$\frac{\left(ky-\sqrt{3}\right)^2}{4}+y^2=1$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{k^2}{4}+1\right)y^2-\frac{\sqrt{3}}{2}ky-\frac{1}{4}=0$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{3}k\pm 2\sqrt{k^2+1}}{k^2+4}$$

となるので，

$$y_1=\frac{\sqrt{3}k+2\sqrt{k^2+1}}{k^2+4},\ y_2=\frac{\sqrt{3}k-2\sqrt{k^2+1}}{k^2+4}$$

である。ここで，直線$x+\sqrt{3}=ky$はkの値に関わらず点$F'\left(-\sqrt{3}, 0\right)$を通るので，$\triangle PP'F$の面積を$S$とすると，

$$S=\frac{1}{2}FF'\left(y_1-y_2\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\left\{\sqrt{3}-\left(-\sqrt{3}\right)\right\}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}k+2\sqrt{k^2+1}}{k^2+4}-\frac{\sqrt{3}k-2\sqrt{k^2+1}}{k^2+4}\right)$$
$$=\frac{4\sqrt{3k^2+3}}{k^2+4}$$

となる。

(答) $\dfrac{4\sqrt{3k^2+3}}{k^2+4}$

(2)

点P, P′は楕円上の点であるから，

$$FP+F'P=FP'+F'P'=4$$

が成り立つ。よって$\triangle PP'F$の内接円の半径をrとすると，

$$S=\frac{1}{2}\left(FP+FP'+PP'\right)r$$
$$=\frac{1}{2}\left(FP+FP'+F'P+F'P'\right)r$$
$$=4r$$
$$\therefore r=\frac{S}{4}=\frac{\sqrt{3k^2+3}}{k^2+4}$$

となる。ここで，$t=k^2$とおくと，$t\geqq 0$であり，

$$r=\frac{\sqrt{3t+3}}{t+4}$$

となるので，

$$\frac{dr}{dt}=\frac{\dfrac{3(t+4)}{2\sqrt{3t+3}}-\sqrt{3t+3}}{(t+4)^2}=\frac{-3t+6}{2(t+4)^2\sqrt{3t+3}}$$

より，$t\geqq 0$におけるrの増減は次表のようになる。

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$\dfrac{dr}{dt}$		+	0	−
r		↗	極大	↘

以上より，rが最大になるのは$t=2$のとき，すなわち$k=\pm\sqrt{2}$のときである。

(答) $k=\pm\sqrt{2}$

【3】

(1)

$f(x)$は奇関数であるから，任意の実数xに対し

$$-f(x)=f(-x) \quad \cdots ①$$

が成り立つ。①に$x=0$を代入することで，

$$-f(0)=f(0)$$
$$\therefore f(0)=0$$

を得る。

(答) $f(0)=0$

(2)

①の両辺をxで微分することで，

$$-f'(x)=f'(-x)\cdot(-1)$$
$$\therefore f'(x)=f'(-x)$$

が成り立つことがわかる。よって$f'(x)$は偶関数である。

(証明終)

(3)

C_1の方程式は

$$y=f(x)$$

であり，C_2の方程式は

$$y=f(x-a)+f(a)$$

であるから，C_1とC_2の共有点のx座標は

$$f(x)=f(x-a)+f(a)$$
$$\Leftrightarrow f(x)-f(x-a)-f(a)=0 \quad \cdots ②$$

を満たす。ここで，②の左辺に$x=0$を代入すると

$$f(0)-f(-a)-f(a)=f(a)-f(a)=0$$

となり，また②の左辺に$x=a$を代入すると，

$$f(a)-f(0)-f(a)=0$$

となるので，C_1とC_2は$(0,0)$および$(a,f(a))$を共有点にもつ。②が$x=0,a$以外の解を持たないことを示す。

$$g(x)=f(x)-f(x-a)-f(a)$$

とおくと，

$$g'(x)=f'(x)-f'(x-a)$$

である。ここで，$x>0$の範囲では$f''(x)>0$より$f'(x)$は単調増加し，また$f'(x)$は偶関数であるから，$x<0$の範囲では$f'(x)$は単調減少することに注意する。xの値で場合分けをする。

[1] $x<0$のとき

このとき，$0>x>x-a$であるから，

$$f'(x)<f'(x-a)$$
$$\therefore g'(x)<0$$

が成り立つ。

[2] $0<x<\dfrac{a}{2}$のとき

このとき，$a-x>x>0$であるから，

$$f'(x-a)=f'(a-x)>f'(x)$$
$$\therefore g'(x)<0$$

が成り立つ。

[3] $x=\dfrac{a}{2}$のとき

このとき，

$$f'(x-a)=f'(a-x)=f'(x)$$
$$\therefore g'(x)=0$$

が成り立つ。

[4] $\dfrac{a}{2}<x<a$のとき

このとき，$0<a-x<x$であるから，

$$f'(x-a)=f'(a-x)<f'(x)$$
$$\therefore g'(x)>0$$

が成り立つ。

[5] $a<x$のとき

このとき，$0<x-a<x$であるから，

$$f'(x)>f'(x-a)$$
$$\therefore g'(x)>0$$

が成り立つ。

以上より，$g(x)$の増減は次表のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{a}{2}$	$\cdots$	a	$\cdots$
$g'(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$g(x)$	↘	0	↘	極小	↗	0	↗

よって前表より，②を満たす，すなわち$g(x)=0$となるxは$x=0,a$のみであることが示された。

(証明終)

(答) 共有点のx座標 $0,a$

(4)

(3)の増減表より，$0<x<a$において$g(x)<0$であるから，

$$S(a)=\int_0^a\{f(x-a)+f(a)-f(x)\}dx$$

である。ここで，$0<a<b$を満たす任意の実数a,bに対し，$t>0$において$f'(t)$が単調増加することより，$0<x<a$の範囲で

$$\begin{aligned}f(x-b)+f(b)&=f(b)-f(b-x)\\&=\int_{b-x}^{b}f'(t)dt\\&>\int_{a-x}^{a}f'(t)dt\\&=f(a)-f(a-x)\\&=f(x-a)+f(a)\end{aligned}$$

が成り立つので，$0<x<b$のとき$f(x-b)+f(b)-f(x)>0$であることを考慮すると

$$\begin{aligned}S(a)&=\int_0^a\{f(x-a)+f(a)-f(x)\}dx\\&<\int_0^a\{f(x-b)+f(b)-f(x)\}dx\\&<\int_0^b\{f(x-b)+f(b)-f(x)\}dx\\&=S(b)\end{aligned}$$

となる。すなわち，$S(a)$は$a>0$の範囲で単調増加する。よってaが$0<a\leqq 3$の範囲を動くとき，$S(a)$が最大になるのは$a=3$のときである。

(答) $a=3$