【1】

〔解答〕

(1) (ア) $\boxed{-\dfrac{1}{3}}$ (イ) $\boxed{\dfrac{1}{2}}$ (ウ) $\boxed{\dfrac{\sqrt{7}-1}{4}}$

(2) (エ) $\boxed{55}$ (オ) $\boxed{220}$ (カ) $\boxed{138}$

(3) (キ) $\boxed{\dfrac{\pi}{3}(1-3a+3a^2+3a^3)}$ (ク) $\boxed{\dfrac{\pi}{3}(3a^2-a^3)}$ (ケ) $\boxed{\dfrac{4}{27}\pi \leqq V(a) \leqq \dfrac{2}{3}\pi}$

(4) (コ) $\boxed{\dfrac{5}{6}}$ (サ) $\boxed{\dfrac{3}{11}}$ (シ) $\boxed{\dfrac{3}{11}}$ (ス) $\boxed{\dfrac{1}{11}}$ (セ) $\boxed{\dfrac{5}{6}}$

〔解説〕

(1)

与えられた2次方程式について，解と係数の関係より，

$$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{7}a$$
$$\sin\theta\cos\theta=3a^3$$

が成り立つ。したがって，

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^2-2\sin\theta\cos\theta=7a^2-6a^3$$

となる。一方，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから，a は以下の関係

$$7a^2-6a^3=1$$

を満たす。この方程式を解くと，

$$6a^3-7a^2+1=0$$
$$\Leftrightarrow (a-1)(2a-1)(3a+1)=0$$
$$\therefore a=-\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 1$$

となるが，

$$|3a^3|=|\sin\theta\cos\theta|=\left|\frac{1}{2}\sin 2\theta\right|\leqq\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow |a^3|\leqq\frac{1}{6}$$

から，$a=1$ は不適であり，$a=-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2}$ とわかる。さらに，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$，すなわち $0\leqq 2\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，$\sin 2\theta=6a^3\geqq 0$ であるから，$a=\dfrac{1}{2}$ と定まる。このとき，方程式

$$x^2-\frac{\sqrt{7}}{2}x+\frac{3}{8}=0$$

を解くと，解は $x=\dfrac{\sqrt{7}\pm 1}{4}$ である。$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ の範囲では $0\leqq\sin\theta\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ であるから，

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{7}-1}{4}$ となる。

(2)

(i)

9つの○を2つの仕切りを用いて3つに区切ることを考える。例えば，

｜○○○｜○○○○○○

と区切り，○の個数を順に x, y, z とおくと，$(x, y, z)=(0, 3, 6)$ となる。このとき，求める x, y, z の組の総数は，○と｜を配置する方法の総数に等しく，

$${}_{11}\mathrm{C}_2=\frac{11\cdot 10}{2\cdot 1}=55 \text{通り}$$

となる。

(ii)

n 個($n\geqq 0$)の○を2つの仕切りを用いて3つに区切る方法は，(i)の結果を利用すると，

${}_{n+2}\mathrm{C}_2=\dfrac{1}{2}(n+2)(n+1)$ と表せる。したがって，求める組の総数は，

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{9}{}_{n+2}\mathrm{C}_2&=\sum_{n=0}^{9}\frac{1}{2}(n+2)(n+1)\\&=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2}(n+1)n\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}(n^2+n)\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}\cdot 10\cdot(10+1)\cdot(2\cdot 10+1)+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 10\cdot(10+1)\right\}\\&=220\end{aligned}$$

となる。

(iii)

まず，$x+y+z\leqq 9$ かつ $0\leqq x<y<z$ を満たす整数 x, y, z の組を全て書き出す。

[1] $x+y+z=3$ のとき

$(0, 1, 2)$ の1組が存在する。

[2] $x+y+z=4$ のとき

$(0, 1, 3)$ の1組が存在する。

[3] $x+y+z=5$ のとき

$(0, 1, 4), (0, 2, 3)$ の2組が存在する。

[4] $x+y+z=6$ のとき

$(0, 1, 5), (0, 2, 4), (1, 2, 3)$ の3組が存在する。

[5] $x+y+z=7$ のとき

$(0, 1, 6), (0, 2, 5), (0, 3, 4), (1, 2, 4)$ の4組が存在する。

[6] $x+y+z=8$ のとき

$(0, 1, 7), (0, 2, 6), (0, 3, 5), (1, 2, 5), (1, 3, 4)$ の5組が存在する。

[7] $x+y+z=9$ のとき

$(0, 1, 8), (0, 2, 7), (0, 3, 6), (0, 4, 5), (1, 2, 6), (1, 3, 5), (2, 3, 4)$ の7組が存在する。

以上[1]から[7]より，3つの異なる数字の組の総数は

$$1+1+2+3+4+5+7=23 \text{組}$$

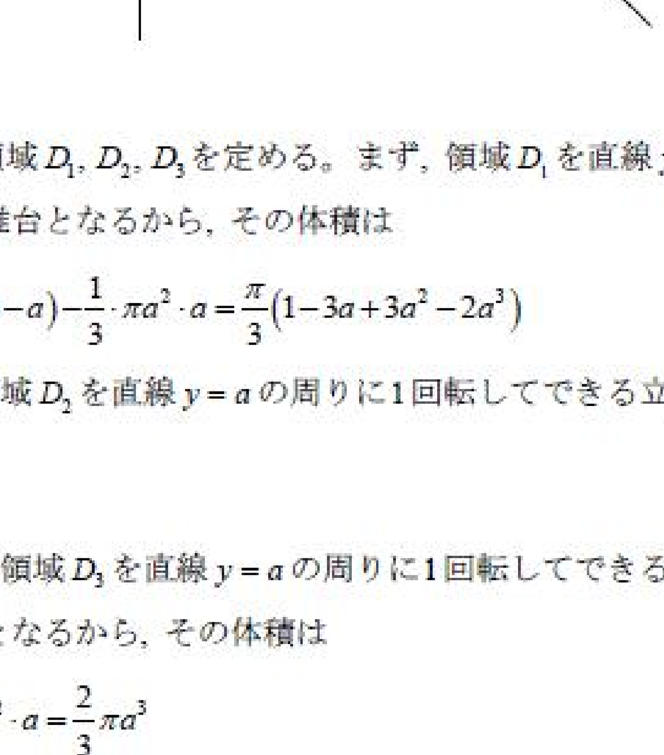
である。ここで，x, y, z の大小を考えないとき，上で挙げたそれぞれの組に対し，並び方が $3\cdot 2=6$ 通り考えられるため，求める組の総数は

$$23\cdot 6=138 \text{通り}$$

である。

(3)

[1] $0\leqq a<\dfrac{1}{2}$ のとき



上図のように，領域 D_1, D_2, D_3 を定める。まず，領域 D_1 を直線 $y=a$ の周りに1回転してできる立体は円錐台となるから，その体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\pi(1-a)^2\cdot(1-a)-\frac{1}{3}\cdot\pi a^2\cdot a=\frac{\pi}{3}(1-3a+3a^2-2a^3)$$

となる。次に，領域 D_2 を直線 $y=a$ の周りに1回転してできる立体は円柱となるから，その体積は

$$\pi a^2\cdot a=\pi a^3$$

となる。最後に，領域 D_3 を直線 $y=a$ の周りに1回転してできる立体は，円柱から円錐をくり抜いた形状となるから，その体積は

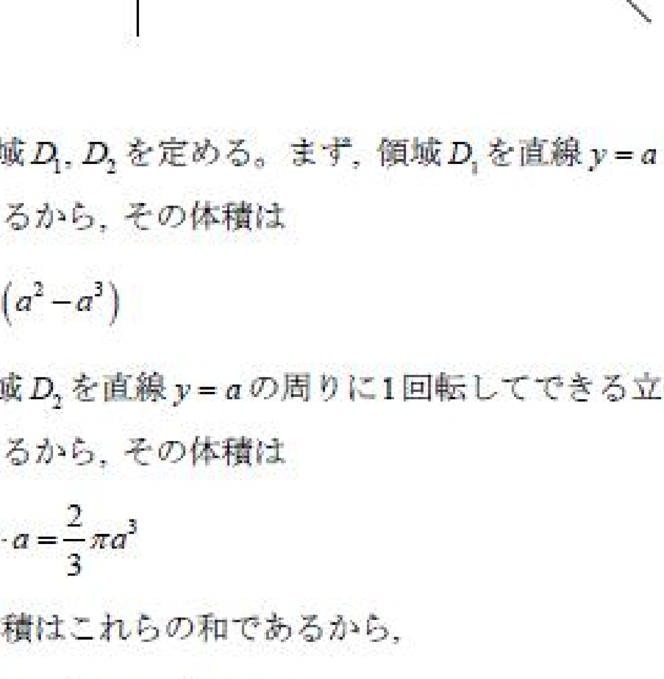
$$\pi a^2\cdot a-\frac{1}{3}\cdot\pi a^2\cdot a=\frac{2}{3}\pi a^3$$

となる。求める体積はこれらの和であるから，

$$V(a)=\frac{\pi}{3}(1-3a+3a^2-2a^3)+\pi a^3+\frac{2}{3}\pi a^3=\frac{\pi}{3}(1-3a+3a^2+3a^3)$$

と求まる。

[2] $\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq 1$ のとき



上図のように，領域 D_1, D_2 を定める。まず，領域 D_1 を直線 $y=a$ の周りに1回転してできる立体は円柱となるから，その体積は

$$\pi a^2\cdot(1-a)=\pi(a^2-a^3)$$

となる。次に，領域 D_2 を直線 $y=a$ の周りに1回転してできる立体は，円柱から円錐をくり抜いた形状となるから，その体積は

$$\pi a^2\cdot a-\frac{1}{3}\cdot\pi a^2\cdot a=\frac{2}{3}\pi a^3$$

となる。求める体積はこれらの和であるから，

$$V(a)=\pi(a^2-a^3)+\frac{2}{3}\pi a^3=\frac{\pi}{3}(3a^2-a^3)$$

と求まる。

以上[1], [2]より，$V(a)$ を得る。ここで，$V(a)$ を a について微分すると，

$$V'(a)=\begin{cases}\pi(3a^2+2a-1) & (0\leqq a<\frac{1}{2}\text{のとき})\\ \pi(-a^2+2a) & (\frac{1}{2}\leqq a\leqq 1\text{のとき})\end{cases}$$

となる。これを利用すると，$V(a)$ の増減は以下のようになる。

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$V'(a)$		$-$	0	$+$	$\frac{3}{4}$	$+$	
$V(a)$	$\frac{\pi}{3}$	↘	$\frac{4}{27}\pi$	↗	$\frac{5}{24}\pi$	↗	$\frac{2}{3}\pi$

以上から，$V(a)$ の取りうる範囲は，$\dfrac{4}{27}\pi\leqq V(a)\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ である。

(4)

線分MNは正三角形の中点を結んでいるから，$\mathrm{MN}=1$ である。また，CM, CN はCから辺OA, OBにおろした垂線であるから，$\mathrm{CM}=\mathrm{CN}=\sqrt{3}$ である。これらから，余弦定理より，

$$\cos\angle\mathrm{MCN}=\frac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-1^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{5}{6}$$

となる。また，ある実数 s, t を用いて，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{CM}}+t\overrightarrow{\mathrm{CN}}\\&=\vec{c}+s(\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})+t(\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\\&=\vec{c}+s\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{c}\right)+t\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}\right)\\&=\frac{s}{2}\vec{a}+\frac{t}{2}\vec{b}+(1-s-t)\vec{c}\end{aligned}$$

と表せる。ここで，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=2$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=2\cdot 2\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=2$ であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\vec{c}\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{c}\right)=-3$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CN}}=\vec{c}\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}\right)=-3$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CN}}=|\overrightarrow{\mathrm{CM}}||\overrightarrow{\mathrm{CN}}|\cos\angle\mathrm{MCN}=\frac{5}{2}$$

となるから，$\mathrm{OH}\perp\mathrm{CM}$ および $\mathrm{OH}\perp\mathrm{CN}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}}=0$$
$$\Leftrightarrow(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{CM}}+t\overrightarrow{\mathrm{CN}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CM}}=0$$
$$\Leftrightarrow -3+s\cdot(\sqrt{3})^2+t\cdot\frac{5}{2}=0$$
$$\therefore 3s+\frac{5}{2}t=3$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CN}}=0$$
$$\Leftrightarrow(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{CM}}+t\overrightarrow{\mathrm{CN}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CN}}=0$$
$$\Leftrightarrow -3+s\cdot\frac{5}{2}+t\cdot(\sqrt{3})^2=0$$
$$\therefore \frac{5}{2}s+3t=3$$

となる。ここから $s=t=\dfrac{6}{11}$ と求まるため，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{3}{11}\vec{a}+\frac{3}{11}\vec{b}-\frac{1}{11}\vec{c}$$

となる。さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=k\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{3}{11}k\vec{a}+\dfrac{3}{11}k\vec{b}-\dfrac{1}{11}k\vec{c}$ とおくと，点Fは平面ABC上にあるため，

$$\frac{3}{11}k+\frac{3}{11}k-\frac{1}{11}k=1$$

が成り立つ。よって，$k=\dfrac{11}{5}$ であり，すなわち $\mathrm{OH}:\mathrm{OF}=5:11$ である。したがって，

$$\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{HF}}=\frac{5}{11-5}=\frac{5}{6}$$

となる。

【２】

(1)

四角形ABCDは円に内接しているから，$\angle ABC=\theta$とおくと，$\angle CDA=\pi-\theta$である。よって，$\cos\angle CDA=-\cos\theta$が成り立つ。ここで，△ABCに余弦定理を適用すると，

$$\cos\theta=\frac{3^2+5^2-\left(3\sqrt{6}\right)^2}{2\cdot3\cdot5}=-\frac{2}{3}$$

となるから，$\cos\angle CDA=\frac{2}{3}$となる。このとき，△CDAに余弦定理を適用すると，

$$\left(3\sqrt{6}\right)^2=x^2+(12-x)^2-2\cdot x\cdot(12-x)\cdot\frac{2}{3}$$

となるから，２次方程式を解くと，

$$54=x^2+x^2-24x+144-16x+\frac{4}{3}x^2$$
$$\Leftrightarrow x^2-12x+27=0$$
$$\therefore x=3,9$$

を得る。

(答)　$x=3,9$

(2)

$AC=a$とおく。このとき，△ABCに余弦定理を適用すると，

$$a^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cos\theta=34-30\cos\theta \quad\cdots①$$

となり，△CDAに余弦定理を適用すると，

$$a^2=x^2+(12-x)^2-2x(12-x)(-\cos\theta) \quad\cdots②$$

となる。よって，①，②からaを消去して整理すると，

$$34-30\cos\theta=x^2+(12-x)^2-2x(12-x)(-\cos\theta)$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-12x-15\right)\cos\theta=x^2-12x+55 \quad\cdots③$$

となる。ここで，条件より$0<x<12$であるから，この範囲において常に

$$x^2-12x-15=(x-6)^2-51<0$$

が成り立つことと，$-1<\cos\theta<1$が成り立つことより，

$$x^2-12x-15<x^2-12x+55<-x^2+12x+15$$

となる。第１辺と第２辺の関係は明らかであり，第２辺と第３辺の関係を変形すると

$$x^2-12x+55<-x^2+12x+15$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-24x+40<0$$
$$\Leftrightarrow 2(x-2)(x-10)<0$$
$$\therefore 2<x<10$$

となるから，求める範囲は$2<x<10$である。

(答)　$2<x<10$

(3)

求める四角形の面積をSとする。△ABCと△CDAに分けて面積を求めると，

$$S=\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\sin\theta+\frac{1}{2}x(12-x)\sin(\pi-\theta)$$
$$=-\frac{x^2-12x-15}{2}\sin\theta$$

となる。ここで，③を用いてθを消去すると，

$$S^2=\frac{\left(x^2-12x-15\right)^2}{4}\sin^2\theta$$
$$=\frac{\left(x^2-12x-15\right)^2}{4}\left(1-\cos^2\theta\right)$$
$$=\frac{\left(x^2-12x-15\right)^2}{4}\left\{1-\left(\frac{x^2-12x+55}{x^2-12x-15}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{\left(x^2-12x-15\right)^2}{4}\cdot\frac{-140\cdot\left(x^2-12x+20\right)}{\left(x^2-12x-15\right)^2}$$
$$=-35\left(x^2-12x+20\right)$$
$$=-35\left\{(x-6)^2-16\right\}$$

となるから，(2)で求めた範囲において，S^2は$x=6$のときに最大値560をとることがわかる。したがって，Sは$x=6$のときに最大値$4\sqrt{35}$をとる。

(答)　$4\sqrt{35}$

(4)

円外の点から円に２本の接線を引くとき，２つの接点と円外の点との距離は等しくなる。よって，辺AB, BC, CD, DA上にある接点をそれぞれE, F, G, Hとおくと，

$$AH=AE,\ BE=BF,\ CF=CG,\ DG=DH$$

が成り立つことから，

$$\begin{cases}AB=AE+EB=AH+BF\\CD=CG+GD=CF+DH\end{cases}$$

となる。このとき，

$$AB+CD=AH+BF+CF+DH$$
$$=AH+DH+BF+CF$$
$$=AD+BC$$

となるから，各辺の長さを代入すると，

$$3+x=(12-x)+5$$
$$\therefore x=7$$

を得る。

(答)　$x=7$

【3】

(1)

双曲線の方程式に関して，両辺を x で微分すると，

$$x-2yy'=0$$

となる。よって，$y\neq 0$ のとき，

$$y'=\frac{x}{2y}$$

となるから，$b\neq 0$ のとき，点 P における接線の傾きは $\frac{a}{2b}$ である。接点 $\mathrm{P}(a,b)$ に関して，

$$\frac{a^2}{2}-b^2=1 \qquad \cdots ①$$

が成り立つことから，$b\neq 0$ のときの接線の方程式は

$$y-b=\frac{a}{2b}(x-a)$$

$$\Leftrightarrow \frac{ax}{2}-by=\frac{a^2}{2}-b^2$$

$$\therefore \frac{ax}{2}-by=1 \qquad \cdots ②$$

となる。また，$b=0$ のとき，双曲線の方程式と $a>0$ より $a=\sqrt{2}$ である。このとき，接線は点 $\mathrm{P}\left(\sqrt{2},0\right)$ を通り y 軸に平行な直線であるから，方程式は $x=\sqrt{2}$ であり，これは②に $(a,b)=\left(\sqrt{2},0\right)$ を代入した結果と一致する。以上より，接線 l の方程式は常に②で与えられる。

(証明終)

(2)

点 $\mathrm{Q}(c,d)$ における接線 m について考える。まず，接線の方程式が x 軸と平行になる場合が存在しないことから，$b\neq 0$ かつ $d\neq 0$ と考えてよく，このときの接線 l,m の傾きはそれぞれ $\frac{a}{2b},\frac{c}{2d}$ となるから，2本の接線が垂直に交わるための条件は，

$$\frac{a}{2b}\cdot\frac{c}{2d}=-1$$

$$\Leftrightarrow c=-\frac{4bd}{a}\ (\because a>0) \qquad \cdots ③$$

となる。また，点 $\mathrm{Q}(c,d)$ について，

$$\frac{c^2}{2}-d^2=1 \qquad \cdots ④$$

が成り立つから，③，④より，

$$\frac{8b^2d^2}{a^2}-d^2=1\Leftrightarrow\left(8b^2-a^2\right)d^2=a^2 \qquad \cdots ⑤$$

となる。ここで，$a^2>0$ かつ $d^2>0$ であるから，$8b^2-a^2>0$ となる必要がある。したがって，①と条件 $a>0$ から，

$$8\left(\frac{a^2}{2}-1\right)-a^2>0 \text{ かつ } a>0$$

$$\Leftrightarrow 3a^2>8 \text{ かつ } a>0$$

$$\therefore a>\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

となり，これが求める条件である。

(答) $a>\frac{2\sqrt{6}}{3}$

(3)

⑤と $d>0$ より，点 Q の座標は $\left(-\frac{4b}{\sqrt{8b^2-a^2}},\frac{a}{\sqrt{8b^2-a^2}}\right)$ である。△OPQ の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}|ad-bc|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{a^2}{\sqrt{8b^2-a^2}}+\frac{4b^2}{\sqrt{8b^2-a^2}}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{a^2+4\left(\frac{a^2}{2}-1\right)}{\sqrt{8\left(\frac{a^2}{2}-1\right)-a^2}}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{3a^2-4}{\sqrt{3a^2-8}}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3a^2-8}+\frac{4}{\sqrt{3a^2-8}}\right)\left(\because\sqrt{3a^2-8}>0\right)$$

と変形でき，$\sqrt{3a^2-8}>0$ であることから，相加平均・相乗平均の関係式より，

$$S=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3a^2-8}+\frac{4}{\sqrt{3a^2-8}}\right)\geqq\sqrt{\sqrt{3a^2-8}\cdot\frac{4}{\sqrt{3a^2-8}}}=2$$

となる。この不等式において，等号が成り立つのは

$$\sqrt{3a^2-8}=\frac{4}{\sqrt{3a^2-8}}$$

$$\Leftrightarrow 3a^2-8=4$$

$$\Leftrightarrow a^2=4$$

となる場合であり，条件より $a>0$ であるから，S を最小にする a の値は $a=2$ である。

(答) $a=2$