

【1】

【解答】

- (1)

(ア)	(イ)
5	-1

 (2)

(ウ)	(エ)	(オ)
$-1 \leq x \leq \sqrt{2}$	$x^3 + 3x^2 - 9x - 3$	$-8 \leq y \leq 8$
- (3)

(カ)	(キ)	(ク)
(1, 3)	5	$1 - 5\sqrt{5} < k < 1 + 5\sqrt{5}$
- (4)

(ケ)	(コ)	(サ)
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2^{n-1}} \right)$
- (5)

(シ)	(ス)	(セ)	(ソ)
$16 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$	$1 - \sqrt{3}i$	1	$-16 + 5\sqrt{3}i$

【解説】

(1)

$x^3 - 4x^2 + ax + b$ を $(x-1)^2$ で割った商を $px + q$ とおくと、

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 + ax + b &= (px + q)(x-1)^2 + 1 \\ \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + ax + b &= px^3 + (q-2p)x^2 + (p-2q)x + q + 1 \end{aligned}$$

となる。この式が恒等式であることから、

$$\begin{cases} 1 = p \\ -4 = q - 2p \\ a = p - 2q \\ b = q + 1 \end{cases}$$

が成立する。これを解いて、 $p=1, q=-2, a=5, b=-1$ となる。

(2)

$$x = \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

である。 $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \pi$ より、 $\frac{\pi}{2} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4}$ であるから、 $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$ となる。し

たがって x の取り得る範囲は $-1 \leq x \leq \sqrt{2}$ である。また、

$$\begin{aligned} x^2 &= (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \\ \therefore \sin \theta \cos \theta &= \frac{1}{2} (x^2 - 1) \end{aligned}$$

であるから、 y を x で表すと、

$$\begin{aligned} y &= \sin^3 \theta + \cos^3 \theta + 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta) + 6 \sin \theta \cos \theta - 9 (\sin \theta + \cos \theta) \\ &= (\sin \theta + \cos \theta) (\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) + 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta) \\ &\quad + 6 \sin \theta \cos \theta - 9 (\sin \theta + \cos \theta) \\ &= x \left\{ 1 - \frac{1}{2} (x^2 - 1) \right\} + \frac{3}{2} (x^2 - 1)x + 6 \cdot \frac{1}{2} (x^2 - 1) - 9x \\ &= x^3 + 3x^2 - 9x - 3 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 3$ とおくと、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 6x - 9 \\ &= 3(x+3)(x-1) \end{aligned}$$

となるため、 $-1 \leq x \leq \sqrt{2}$ における $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	-1	...	1	...	$\sqrt{2}$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$f(-1)=8, f(1)=-8, f(\sqrt{2})=3-7\sqrt{2}$ であり、 $3-7\sqrt{2} < 8$ である。したがって、 y は $x=1$ のときに最小値 -8 をとり、 $x=-1$ のときに最大値 8 をとる。

(3)

3 点 A, B, C を通る円の中心を (p, q) 、半径を r とおく。

$$(p+3)^2 + (q-6)^2 = (p-5)^2 + q^2 = (p-4)^2 + (q-7)^2 = r^2$$

が成り立つから、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} (p+3)^2 + (q-6)^2 = (p-5)^2 + q^2 \\ (p-5)^2 + q^2 = (p-4)^2 + (q-7)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} p^2 + 6p + 9 + q^2 - 12q + 36 = p^2 - 10p + 25 + q^2 \\ p^2 - 10p + 25 + q^2 = p^2 - 8p + 16 + q^2 - 14q + 49 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 16p - 12q + 20 = 0 \\ 2p - 14q + 40 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 4p - 3q + 5 = 0 \\ p - 7q + 20 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 4(7q - 20) - 3q + 5 = 0 \\ p = 7q - 20 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 25q - 75 = 0 \\ p = 7q - 20 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} p = 1 \\ q = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。よって、円の中心の座標は $(1, 3)$ であり、 $r^2 = (p+3)^2 + (q-6)^2 = 4^2 + (-3)^2 = 25$ より、円の半径は $r=5$ である。また、直線 $y=2x+k$ が円と共有点を 2 個持つとき、直線と円の中心の距離は半径より小さい。 $y=2x+k \Leftrightarrow 2x-y+k=0$ だから、求める k の値の範囲は、

$$\begin{aligned} &\frac{|2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} < 5 \\ \Leftrightarrow &\frac{(k-1)^2}{5} < 25 \\ \Leftrightarrow &(k-1)^2 < 125 \\ \Leftrightarrow &-5\sqrt{5} < k-1 < 5\sqrt{5} \\ \Leftrightarrow &1-5\sqrt{5} < k < 1+5\sqrt{5} \end{aligned}$$

となる。

(4)

条件より、「あたり」が表示された後に続けて「あたり」が表示される確率は $\frac{2}{3}$ であり、「は

ずれ」が表示された後に続けて「あたり」が表示される確率は $\frac{1}{6}$ である。したがって、

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{6}(1-a_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \\ a_3 &= \frac{2}{3}a_2 + \frac{1}{6}(1-a_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

となる。また、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{3}a_{n-1} + \frac{1}{6}(1-a_{n-1}) = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{6} \\ \Leftrightarrow a_n - \frac{1}{3} &= \frac{1}{2} \left(a_{n-1} - \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

であるから、数列 $\left\{ a_n - \frac{1}{3} \right\}$ は初項 $a_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ 、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列となる。よって、

$$\begin{aligned} a_n - \frac{1}{3} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \\ \therefore a_n &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2^{n-1}} \right) \end{aligned}$$

を得る。

(5)

z^4 を極形式で表すと、

$$z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i = 16 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 16 \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right) \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。ここで、 z の実部が正で虚部が負であることから、

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \left(r > 0, \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi \right)$$

と表せる。 $z^4 = r^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta)$ であるから、 $\textcircled{1}$ と比較して、

$$r^4 = 16, 4\theta + 2n\pi = \frac{2}{3}\pi \quad (n \text{ はある整数})$$

とかける。したがって $r=2, \theta = \frac{5}{3}\pi$ であり、

$$z = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 1 - \sqrt{3}i$$

を得る。 w は線分 OA の中点だから、 $w = \frac{1}{2}z = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}$ であり、

$$\begin{aligned} w^{2017} + (\overline{w})^{2017} &= \left(\cos \frac{2017 \times 5\pi}{3} + i \sin \frac{2017 \times 5\pi}{3} \right) + \left(\cos \frac{2017 \times 5\pi}{3} - i \sin \frac{2017 \times 5\pi}{3} \right) \\ &= 2 \cos \frac{2017 \times 5\pi}{3} \\ &= 2 \cos \frac{5\pi}{3} \\ &= 1 \end{aligned}$$

である。また、 $z \neq 1$ より

$$\begin{aligned} 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 &= \frac{z^5 - 1}{z - 1} \\ &= \frac{2^5 \left(\cos \frac{5 \times 5\pi}{3} + i \sin \frac{5 \times 5\pi}{3} \right) - 1}{(1 - \sqrt{3}i) - 1} \\ &= \frac{32 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) - 1}{-\sqrt{3}i} \\ &= \frac{15 + 16\sqrt{3}i}{-\sqrt{3}i} \\ &= -16 + 5\sqrt{3}i \end{aligned}$$

となる。

【2】

(1)

放物線 C は $x=1$ を軸とする上に凸な放物線であるため、 $C: y=p(x-1)^2+q$ ($p<0$) と表せる。

放物線 C は原点と点 $A(a, 2a\sqrt{a})$ を通るから、

$$\begin{cases} 0=p+q \\ 2a\sqrt{a}=p(a-1)^2+q \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q=-p \\ 2a\sqrt{a}=p(a-1)^2-p \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q=-p \\ 2a\sqrt{a}=pa(a-2) \end{cases}$$

となる。いま、 $a \neq 0$ であり、 $a=2$ のとき第2式が $4\sqrt{2}=0$ となるため、 $a \neq 2$ である。したがって、 $p=\frac{2\sqrt{a}}{a-2}$ であり、放物線 C の頂点の y 座標は、

$$q=-p=-\frac{2\sqrt{a}}{a-2}$$

となる。また、 $p<0$ より、 a のとり得る値の範囲は、

$$\frac{2\sqrt{a}}{a-2}<0 \Leftrightarrow 0<a<2$$

である。

(答) C の頂点の y 座標: $-\frac{2\sqrt{a}}{a-2}$

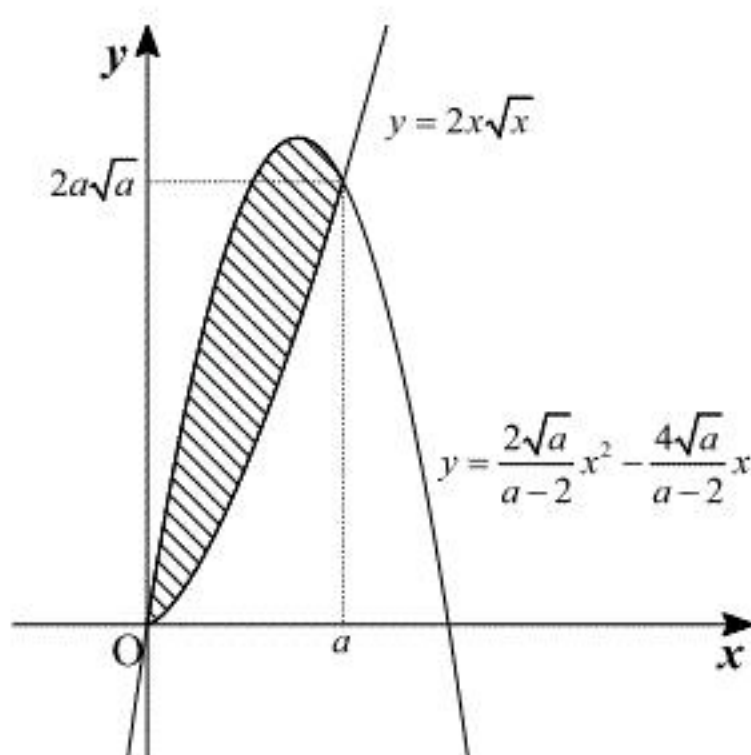
a のとり得る値の範囲: $0<a<2$

(2)

(1)より、放物線 C の方程式は

$$y=\frac{2\sqrt{a}}{a-2}(x-1)^2-\frac{2\sqrt{a}}{a-2} \Leftrightarrow y=\frac{2\sqrt{a}}{a-2}x^2-\frac{4\sqrt{a}}{a-2}x$$

となる。また、放物線 C と曲線 $y=2x\sqrt{x}$ を図示すると以下のようになる。



上図の斜線部の面積が S であるから、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a \left\{ \left(\frac{2\sqrt{a}}{a-2}x^2 - \frac{4\sqrt{a}}{a-2}x \right) - 2x\sqrt{x} \right\} dx \\ &= \left[\frac{2\sqrt{a}}{3(a-2)}x^3 - \frac{2\sqrt{a}}{a-2}x^2 - \frac{4}{5}x^2\sqrt{x} \right]_0^a \\ &= \frac{2a^3\sqrt{a}}{3(a-2)} - \frac{2a^2\sqrt{a}}{a-2} - \frac{4a^2\sqrt{a}}{5} \\ &= -\frac{2a^2(a+3)\sqrt{a}}{15(a-2)} \end{aligned}$$

となる。

(答) $-\frac{2a^2(a+3)\sqrt{a}}{15(a-2)}$

(3)

放物線 C の方程式は $C: y=\frac{2\sqrt{a}}{a-2}x^2-\frac{4\sqrt{a}}{a-2}x=\frac{2\sqrt{a}}{a-2}x(x-2)$ と表せるため、 C と x 軸で囲まれた部分の面積は、

$$\begin{aligned} T &= \int_0^2 \frac{2\sqrt{a}}{a-2}x(x-2)dx \\ &= -\frac{1}{6} \times \frac{2\sqrt{a}}{a-2}(2-0)^3 \\ &= -\frac{8\sqrt{a}}{3(a-2)} \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} 2S &= T \\ \Leftrightarrow 2 \times \left\{ -\frac{2a^2(a+3)\sqrt{a}}{15(a-2)} \right\} &= -\frac{8\sqrt{a}}{3(a-2)} \\ \Leftrightarrow \frac{a^2(a+3)}{5} &= 2 \\ \Leftrightarrow a^3+3a^2-10 &= 0 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $f(a)=a^3+3a^2-10$ とおいたとき、 $f(a)=0$ となる a が $0<a<2$ の範囲にただ1つ存在することを示せばよい。 $0<a<2$ において、

$$f'(a)=3a^2+6a=3a(a+2)>0$$

であることから、 $0 \leq a \leq 2$ において $f(a)$ は単調増加である。 $f(0)=-10<0$ 、 $f(2)=10>0$ より、 $f(a)=0$ となる a は $0<a<2$ の範囲にただ1つ存在する。よって題意が示された。

(証明終)

【3】

(1)

$y > 0$ より、 $\sqrt{3}x + y > \sqrt{3}x - y$ である。以下絶対値の中身の正負により場合分けを行う。

[1] $\sqrt{3}x + y > \sqrt{3}x - y \geq 0$ ，すなわち $-\sqrt{3}x < y \leq \sqrt{3}x$ のとき

曲線 C の方程式は、

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - (\sqrt{3}x + y) - (\sqrt{3}x - y) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - \sqrt{3})^2 + y^2 &= 3 \end{aligned}$$

となるため、この範囲での曲線 C は中心 $(\sqrt{3}, 0)$ ，半径 $\sqrt{3}$ の円である。

[2] $\sqrt{3}x + y \geq 0 > \sqrt{3}x - y$ ，すなわち $y > \sqrt{3}x$ かつ $y \geq -\sqrt{3}x$ のとき

曲線 C の方程式は、

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - (\sqrt{3}x + y) + (\sqrt{3}x - y) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + (y - 1)^2 &= 1 \end{aligned}$$

となるため、この範囲での曲線 C は中心 $(0, 1)$ ，半径 1 の円である。

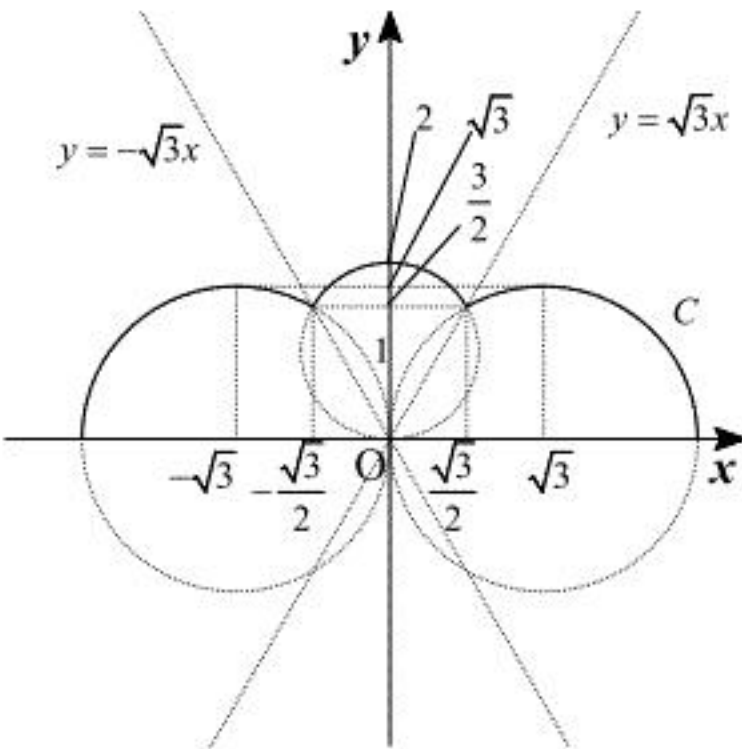
[3] $0 > \sqrt{3}x + y > \sqrt{3}x - y$ ，すなわち $\sqrt{3}x < y < -\sqrt{3}x$ のとき

曲線 C の方程式は、

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + (\sqrt{3}x + y) + (\sqrt{3}x - y) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}x &= 0 \\ \Leftrightarrow (x + \sqrt{3})^2 + y^2 &= 3 \end{aligned}$$

となるため、この範囲での曲線 C は中心 $(-\sqrt{3}, 0)$ ，半径 $\sqrt{3}$ の円である。

以上[1], [2], [3]と $y > 0$ より、曲線 C の概形は下図の実線部ようになる。



上図より、 b のとり得る値の範囲は $\frac{3}{2} < b < \sqrt{3}$ である。

(答) C の概形： 上図

b のとり得る範囲： $\frac{3}{2} < b < \sqrt{3}$

(2)

曲線 C と直線 $y = ax + b$ が 6 個の共有点を持つとき、曲線 C は(1)の[1], [2], [3]の部分にそれぞれ 2 点ずつ共有点を持つ。これは、直線 $y = ax + b$ が、 $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ において $y > \frac{3}{2}$ となる点を通り、かつ円 $x^2 - 2\sqrt{3}x + y^2 = 0$ および円 $x^2 + 2\sqrt{3}x + y^2 = 0$ と 2 点ずつで交わることに同値である。よって下記の条件が必要十分である。

$$\begin{cases} a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + b > \frac{3}{2} & \dots \textcircled{1} \\ a \cdot \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} \right) + b > \frac{3}{2} & \dots \textcircled{2} \\ x^2 - 2\sqrt{3}x + y^2 = 0 \text{ かつ } y = ax + b \text{ となる実数の組 } (x, y) \text{ が 2 組存在する} & \dots \textcircled{3} \\ x^2 + 2\sqrt{3}x + y^2 = 0 \text{ かつ } y = ax + b \text{ となる実数の組 } (x, y) \text{ が 2 組存在する} & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

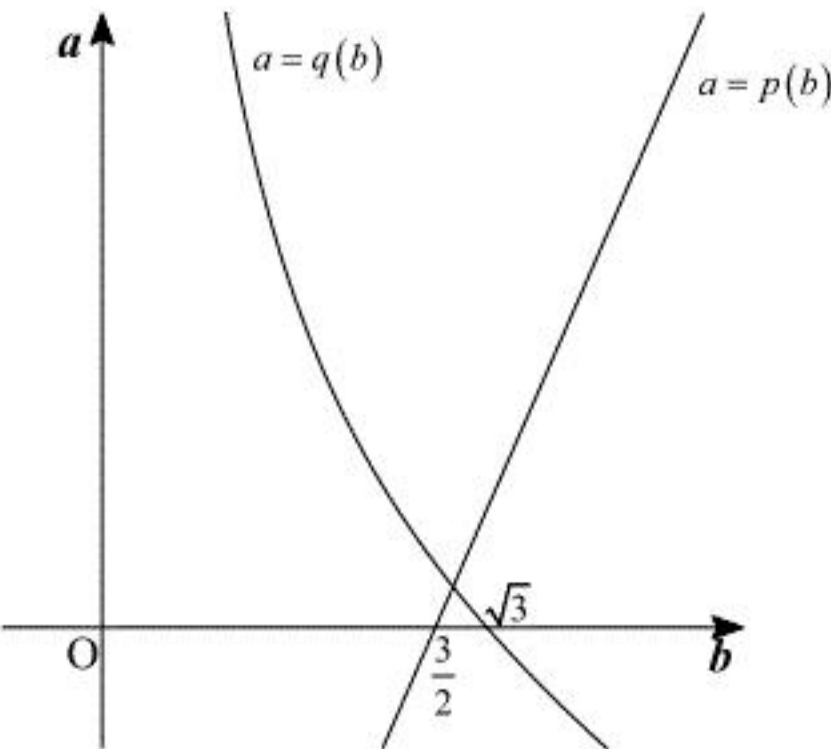
①より $a > \sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}b$ であり、②より $a < -\sqrt{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}b$ である。また、③は、

$$\begin{aligned} \textcircled{3} &\Leftrightarrow x \text{ の方程式 } x^2 - 2\sqrt{3}x + (ax + b)^2 = 0 \text{ が異なる 2 つの実数解をもつ} \\ &\Leftrightarrow x \text{ の方程式 } (a^2 + 1)x^2 + (2ab - 2\sqrt{3})x + b^2 = 0 \text{ が異なる 2 つの実数解をもつ} \\ &\Leftrightarrow (ab - \sqrt{3})^2 - (a^2 + 1) \times b^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3 - b^2}{2\sqrt{3}b} > a \left(\because \frac{3}{2} < b < \sqrt{3} \right) \end{aligned}$$

と変形でき、同様にして④は、

$$\begin{aligned} \textcircled{4} &\Leftrightarrow (ab + \sqrt{3})^2 - (a^2 + 1) \times b^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{3 - b^2}{2\sqrt{3}b} < a \left(\because \frac{3}{2} < b < \sqrt{3} \right) \end{aligned}$$

と変形できる。以上より、 $f(b)$ は $\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}b$ と $-\frac{3 - b^2}{2\sqrt{3}b}$ のうちの大きいほうであり、 $g(b)$ は $-\sqrt{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}b$ と $\frac{3 - b^2}{2\sqrt{3}b}$ のうちの小さいほうである。したがって、 $p(b) = -2\sqrt{3} + \frac{4}{\sqrt{3}}b$ ， $q(b) = \frac{3 - b^2}{\sqrt{3}b}$ とおくと、 $g(b) - f(b)$ は、 $p(b), q(b)$ のうちの小さいほうとなる。 $p(b)$ は単調増加関数であり、 $q'(b) = -\frac{\sqrt{3}}{b^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} < 0$ ($b \neq 0$) より、 $q(b)$ は $b > 0$ の範囲で単調減少関数である。 $p\left(\frac{3}{2}\right) = 0, q(\sqrt{3}) = 0$ より、 $a = p(b), a = q(b)$ のグラフは下図ようになる。



したがって、 $g(b) - f(b)$ が最大値をとるのは $p(b) = q(b)$ となるときである。

$$\begin{aligned} p(b) &= q(b) \\ \Leftrightarrow -2\sqrt{3} + \frac{4}{\sqrt{3}}b &= \frac{3 - b^2}{\sqrt{3}b} \\ \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{3}}b - 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow 5b^2 - 6b - 3 &= 0 \left(\because b \neq 0 \right) \\ \Leftrightarrow b &= \frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{5} \end{aligned}$$

となるが、 $\frac{3}{2} < b < \sqrt{3}$ より、求める b の値は $b = \frac{3 + 2\sqrt{6}}{5}$ である。

(答) $\frac{3 + 2\sqrt{6}}{5}$