

【1】

【解答】

	(ア)	(イ)
(1)	$\frac{3-e}{2}$	$\frac{\pi(-e^2+8e-13)}{6}$

	(ウ)	(エ)	(オ)※	(カ)※
(2)	$\frac{\pi}{4}$	$-2a+7$	$\frac{11+\sqrt{6}}{5}$	$\frac{11-\sqrt{6}}{5}$

	(キ)	(ク)	(ケ)
(3)	$\frac{2t^2+1}{t}$	$-\frac{\pi}{12}$	$2\sqrt{2}<k<\frac{5\sqrt{2}}{2}$

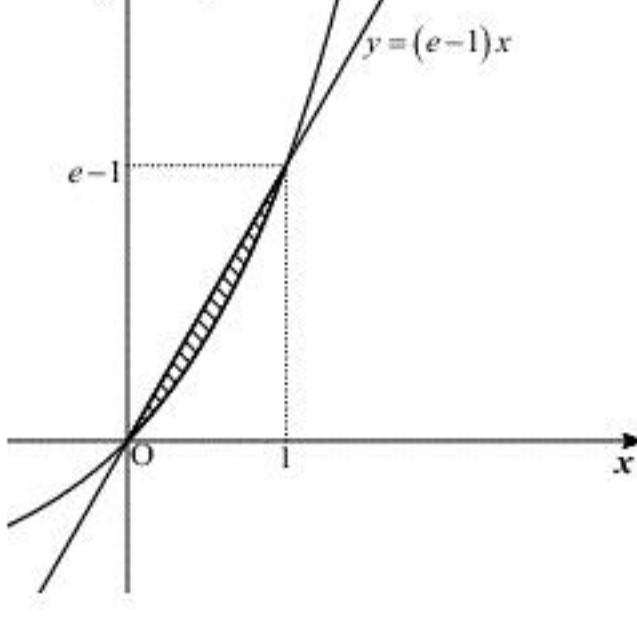
	(コ)	(サ)	(シ)
(4)	22	86	$\frac{4^n+2}{3}$

※(オ)と(カ)の答えは逆でもよい。

【解説】

(1)

直線 l の方程式は $y=(e-1)x$ であるから、求める面積を S とすると S は下図の斜線部分の面積になる。



したがって、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \left\{ (e-1)x - (e^x - 1) \right\} dx \\ &= \left[\frac{(e-1)}{2} x^2 - e^x + x \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{e-1}{2} - e + 1 \right) + 1 \\ &= \frac{3-e}{2} \end{aligned}$$

である。また、求める体積を V とすると、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \left\{ (e-1)x \right\}^2 dx - \pi \int_0^1 (e^x - 1)^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 \left\{ (e-1)^2 x^2 - (e^x - 1)^2 \right\} dx \\ &= \pi \int_0^1 \left\{ (e-1)^2 x^2 - (e^{2x} - 2e^x + 1) \right\} dx \\ &= \pi \left[\frac{(e-1)^2}{3} x^3 - \frac{1}{2} e^{2x} + 2e^x - x \right]_0^1 \\ &= \pi \left\{ \left(\frac{(e-1)^2}{3} - \frac{1}{2} e^2 + 2e - 1 \right) - \left(-\frac{1}{2} + 2 \right) \right\} \\ &= \frac{\pi(-e^2+8e-13)}{6} \end{aligned}$$

である。

(2)

点 A, B, C, D の表す複素数をそれぞれ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とおく。 $a=5, b=3$ の時、 $\gamma=5+3i, \delta=3+5i$

である。この時、

$$\begin{aligned} \theta &= \arg \left(\frac{\delta - \alpha}{\gamma - \alpha} \right) \\ &= \arg \left\{ \frac{(3+5i) - (3+i)}{(5+3i) - (3+i)} \right\} \\ &= \arg \left(\frac{4i}{2+2i} \right) \\ &= \arg(1+i) \\ &= \arg \left\{ \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right\} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

である。また、3 点 A, B, C が一直線上に存在する時、 $\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数になるから、

$$\begin{aligned} \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} &= \frac{(a-3)+(b-1)i}{-1+2i} \\ &= \frac{\{(a-3)+(b-1)i\}(-1-2i)}{5} \\ &= \frac{(-a+2b+1)+(-2a-b+7)i}{5} \end{aligned}$$

より、 $-2a-b+7=0$ を変形して、 $b=-2a+7$ となる。さらに、2 直線 AD, BD が垂直になる時、

$\frac{\delta-\beta}{\delta-\alpha}$ が純虚数になる。 $b=-2a+7$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\delta-\beta}{\delta-\alpha} &= \frac{(b-2)+(a-3)i}{(b-3)+(a-1)i} \\ &= \frac{(-2a+5)+(a-3)i}{(-2a+4)+(a-1)i} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{(-2a+5)+(a-3)i}{(-2a+4)+(a-1)i} + \frac{\overline{(-2a+5)+(a-3)i}}{\overline{(-2a+4)+(a-1)i}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(-2a+5)+(a-3)i}{(-2a+4)+(a-1)i} + \frac{(-2a+5)-(a-3)i}{(-2a+4)-(a-1)i} &= 0 \\ \Leftrightarrow (-2a+5)(-2a+4)+(a-3)(a-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 5a^2-22a+23 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{11 \pm \sqrt{6}}{5} \end{aligned}$$

の時に3 点 A, B, C が一直線上にあり、さらに2 直線 AD, BD が垂直になる。

(3)

$$\begin{cases} t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x \\ \sin 2x = 2 \sin x \cos x \end{cases}$$

より、 $\sin 2x = t^2 - 1$ と表せるから、 $f(x)$ を t を用いて表すと、

$$f(x) = \frac{3+2(t^2-1)}{t} = \frac{2t^2+1}{t}$$

となる。ここで、

$$t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

について、 $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ より、 $0 < \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) < 1 \Leftrightarrow 0 < t < \sqrt{2}$ である。また、 x

と t はこの範囲で1:1で対応する。したがって、 $g(t) = \frac{2t^2+1}{t}$ の $0 < t < \sqrt{2}$ における最小値を考えればよい。ここで、

$$g'(t) = \frac{4t \cdot t - (2t^2+1) \cdot 1}{t^2} = \frac{2t^2-1}{t^2}$$

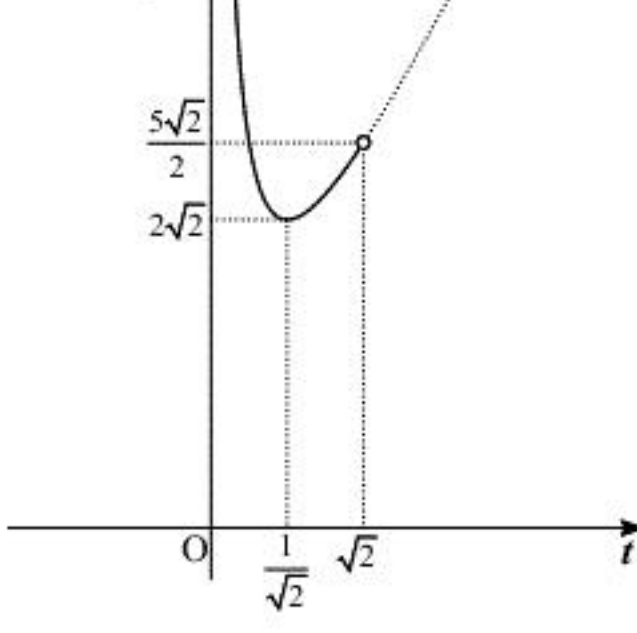
より、 $g'(t)=0$ となる t は $0 < t < \sqrt{2}$ の範囲では $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから、関数 $g(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	(0)	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	($\sqrt{2}$)
$g'(t)$		-	0	+	
$g(t)$	(∞)	$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\left(\frac{5\sqrt{2}}{2} \right)$

したがって、

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(2t + \frac{1}{t} \right) = \infty$$

を考慮して $g(t)$ のグラフの概形を描くと以下の実線部のようになる。



グラフより、 $g(t)$ 、すなわち $f(x)$ が最小値を取るのは $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる時である。この時

$0 < x + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ より、

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} &= \frac{\pi}{6} \\ \therefore x &= -\frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

である。また、方程式 $f(x)=k$ の異なる実数解が2 個となるのは、

$t = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \left(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \right)$ が x と1:1で対応していることから、方程式 $g(t)=k$ の異なる

実数解が2 個となるときである。したがって、上図より、

$$2\sqrt{2} < k < \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

を満たす時に方程式 $f(x)=k$ の異なる実数解が2 個となる。

(4)

自然数が3の倍数となる条件は各位の数の和が3の倍数になることである。3, 4, 5, 6 を3で割った余りで分類し、

$$\begin{cases} A_0 = \{3, 6\} \\ A_1 = \{4\} \\ A_2 = \{5\} \end{cases}$$

の3つの集合を考える。また、3, 4, 5, 6 を重複を許して使ってできる n 桁の整数のうち、3で

割った余りが1, 2であるものの個数をそれぞれ b_n, c_n とし、3, 4, 5, 6 を重複を許して使ってできる $n+1$ 桁の整数が3の倍数となる条件を考える。 $n+1$ 桁の整数の先頭の数に着目すると、

先頭の数が A_0 の元かつ下 n 桁が3の倍数

先頭の数が A_1 の元かつ下 n 桁を3で割った余りが2

先頭の数が A_2 の元かつ下 n 桁を3で割った余りが1

のいずれかであるとき、3, 4, 5, 6 を重複を許して使ってできる $n+1$ 桁の整数が3の倍数となる。したがって、 a_n の漸化式を立てると、

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n + c_n$$

が得られる。ここで、3, 4, 5, 6 を重複を許して使ってできる n 桁の整数の総数は $a_n + b_n + c_n$ に

等しいから、

$$a_n + b_n + c_n = 4^n$$

である。これを、 a_{n+1} の漸化式に代入すると、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + (a_n + b_n + c_n) \\ &= a_n + 4^n \end{aligned}$$

が得られる。 a_n の階差数列に注目してこの漸化式を $n \geq 2$ のもとで解くと、

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 4^k \\ &= 2 + 4 \cdot \frac{4^{n-1}-1}{4-1} \\ &= \frac{4^n+2}{3} \end{aligned}$$

である。これは $n=1$ でも成立するため、結局すべての自然数 n について

$$a_n = \frac{4^n+2}{3}$$

である。したがって、 $a_3 = 22, a_4 = 86$ である。

【2】

(1)

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{2} = 1 & \cdots \textcircled{1} \\ x^2 - \frac{y^2}{b} = 1 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

を x^2, y^2 について解く。②を x^2 について変形して①に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \left(1 + \frac{y^2}{b} \right) + \frac{y^2}{2} &= 1 \\ \Leftrightarrow 2b + 2y^2 + aby^2 &= 2ab \\ \Leftrightarrow y^2 &= \frac{2b(a-1)}{2+ab} \end{aligned}$$

となり、この結果を②に代入すると、

$$\begin{aligned} x^2 &= 1 + \frac{y^2}{b} \\ &= 1 + \frac{2(a-1)}{2+ab} \\ &= \frac{a(b+2)}{2+ab} \end{aligned}$$

である。 C_1 と C_2 が 4 つの共有点を持つのは、

$$\begin{cases} 0 < \frac{a(b+2)}{2} \\ 0 < \frac{2b(a-1)}{2+ab} \end{cases}$$

を満たすときである。 a, b は正の定数であるから、

$$\begin{aligned} 0 &< a-1 \\ \Leftrightarrow 1 &< a \end{aligned}$$

を満たすときに C_1 と C_2 が 4 つの共有点を持つ。このとき、第 I 象限にある C_1 と C_2 の共有点の

座標は $P \left(\sqrt{\frac{a(b+2)}{2+ab}}, \sqrt{\frac{2b(a-1)}{2+ab}} \right)$ である。

$$(\text{答}) \text{ 点 } P \text{ の座標 : } \left(\sqrt{\frac{a(b+2)}{2+ab}}, \sqrt{\frac{2b(a-1)}{2+ab}} \right), a \text{ のとり得る値の範囲 : } 1 < a$$

(2)

$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{2} = 1$ の両辺を x で微分すると、

$$\frac{2x}{a} + y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

となる。 $y \neq 0$ のとき、 $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{ay}$ である。同様に、 $x^2 - \frac{y^2}{b} = 1$ も $y \neq 0$ のもとで両辺を x で微分すると、

$$\begin{aligned} 2x - \frac{2y}{b} \cdot \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{bx}{y} \end{aligned}$$

である。したがって、(1)の結果より、点 P における C_1 と C_2 の接線の傾きはそれぞれ、

$$\begin{cases} -\frac{2x}{ay} = -\frac{2}{a} \sqrt{\frac{a(b+2)}{2b(a-1)}} \\ \frac{bx}{y} = b \sqrt{\frac{a(b+2)}{2b(a-1)}} \end{cases}$$

と表せる。2 接線が垂直に交わる条件は、 $a > 0, b > 0$ より

$$\begin{aligned} -\frac{2}{a} \sqrt{\frac{a(b+2)}{2b(a-1)}} \cdot b \sqrt{\frac{a(b+2)}{2b(a-1)}} &= -1 \\ \Leftrightarrow 2ab(b+2) &= 2ab(a-1) \\ \Leftrightarrow b+2 &= a-1 \\ \Leftrightarrow b &= a-3 \end{aligned}$$

である。 $0 < b$ より、このとき $3 < a$ を満たす必要がある。また、 $P(p, q)$ とすると、 S は 4 点 $(p, q), (-p, q), (-p, -q), (p, -q)$ を頂点とする長方形の面積であるから、

$$\begin{aligned} S &= 2p \cdot 2q \\ &= 4 \sqrt{\frac{a(b+2)}{2+ab}} \cdot \sqrt{\frac{2b(a-1)}{2+ab}} \\ &= \frac{4\sqrt{2ab(a-1)(b+2)}}{2+ab} \end{aligned}$$

と表せる。 $b = a-3$ を代入して整理すると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{4\sqrt{2a(a-3)(a-1)^2}}{2+a(a-3)} \\ &= \frac{4\sqrt{2a(a-3)(a-1)^2}}{a^2-3a+2} \\ &= \frac{4\sqrt{2a(a-3)}}{a-2} \end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad b = a-3, S = \frac{4\sqrt{2a(a-3)}}{a-2}, a \text{ のとり得る値の範囲 : } 3 < a$$

(3)

$f(a) = \frac{4\sqrt{2a(a-3)}}{a-2}$ として方程式 $f(a) = k$ が $3 < a$ の範囲で相異なる 2 つの実数解を持つ条

件を考えればよい。 $\left(\sqrt{a(a-3)} \right)' = \frac{2a-3}{2\sqrt{a(a-3)}}$ より、

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{4\sqrt{2} \cdot \left(\frac{2a-3}{2\sqrt{a(a-3)}} \right) \cdot (a-2) - 4\sqrt{2a(a-3)}}{(a-2)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{2}(a-2)(2a-3) - 4\sqrt{2a(a-3)}}{(a-2)^2 \cdot \sqrt{a(a-3)}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}(2a^2 - 7a + 6) - 4\sqrt{2}(a^2 - 3a)}{(a-2)^2 \cdot \sqrt{a(a-3)}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}(6-a)}{(a-2)^2 \cdot \sqrt{a(a-3)}} \end{aligned}$$

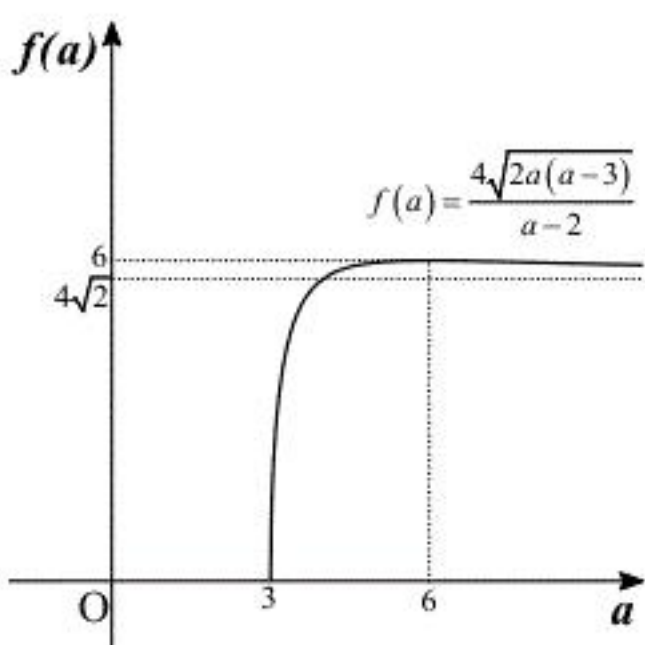
となる。よって、 $3 < a$ の範囲で $f'(a) = 0$ となる a を求めると $a = 6$ であるから、 $f(a)$ の増減表は以下ようになる。

a	(3)	...	6	...
$f'(a)$		+	0	-
$f(a)$		$\nearrow$	6	$\searrow$

ここで、

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 3+0} f(a) &= \lim_{a \rightarrow 3+0} \frac{4\sqrt{2a(a-3)}}{a-2} = 0 \\ \lim_{a \rightarrow \infty} f(a) &= \lim_{a \rightarrow \infty} 4\sqrt{2} \sqrt{\frac{1-\frac{3}{a}}{1-\frac{2}{a}}} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

を考慮すると、 $f(a)$ のグラフの概形は以下ようになる。



したがって、 $f(a) = k$ が $3 < a$ の範囲で相異なる 2 つの実数解を持つのは、

$$4\sqrt{2} < k < 6$$

のときであり、これが求める k の値の範囲である。

$$(\text{答}) \quad 4\sqrt{2} < k < 6$$

【3】

(1)

真数条件から、 $f(x)=\frac{1-x\log x}{x}=\frac{1}{x}-\log x$ の定義域は $0<x$ である。このとき、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{x}\right)' - (\log x)' \\ &= -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \\ &= -\frac{x+1}{x^2} < 0 \end{aligned}$$

より、 $f(x)$ は $0<x$ で単調減少する。また、

$$\begin{cases} f(1)=1 \\ f(e)=\frac{1-e}{e} \end{cases}$$

について、 $2<e<3$ を利用すると $f(e)<0$ であるから、中間値の定理より方程式 $f(x)=0$ は $1<x<e$ の範囲に実数解を持つことが分かる。 $f(x)$ の単調減少性より、この実数解は1つだけであるから、方程式 $f(x)=0$ がただ1つの実数解を持つことが示された。

(証明終)

(2)

$g_1(x)=c\log x$, $g_2(x)=e^x$ とおく。曲線 $y=g_1(x)$ 上の点 $(p, g_1(p))$ における接線及び、曲線

$y=g_2(x)$ 上の点 $(q, g_2(q))$ における接線について考える。

$$\begin{cases} g_1'(x)=\frac{c}{x} \\ g_2'(x)=e^x \end{cases}$$

より、それぞれの接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= \frac{c}{p}(x-p) + c\log p \\ \Leftrightarrow y &= \frac{c}{p}x + c(\log p - 1) \\ y &= e^q(x-q) + e^q \\ \Leftrightarrow y &= e^qx + (1-q)e^q \end{aligned}$$

と表せる。2つの曲線が共通の接線を持つとき、

$$\begin{cases} \frac{c}{p} = e^q \\ c(\log p - 1) = (1-q)e^q \end{cases}$$

を満たす実数 p, q が存在する。ここで、 $y=g_1(x)$ の定義域は真数条件より $0<x$ であるから、

$0<p$ である。このとき、 $\frac{c}{p} = e^q \Leftrightarrow q = \log c - \log p$ と $c>0$ より、

$$\begin{aligned} c(\log p - 1) &= (1 + \log p - \log c) \cdot e^{\log c - \log p} \\ \Leftrightarrow c(\log p - 1) &= (1 + \log p - \log c) \cdot \frac{c}{p} \\ \Leftrightarrow \log c &= p + (1-p)\log p + 1 \end{aligned}$$

が得られる。したがって、この p に関する方程式が正の実数解をもつときに2つの曲線の共通接線が存在する。よって、

$$h(p) = p + (1-p)\log p + 1$$

として、方程式 $h(p) = \log c$ が $0<p$ の実数解を持つような c の値の範囲を考えればよい。

$$\begin{aligned} h'(p) &= 1 - \log p + \frac{1-p}{p} \\ &= \frac{1-p\log p}{p} \\ &= f(p) \end{aligned}$$

であるから、与えられた条件より $p=\alpha$ で $h'(p)=0$ となる。また、(1)より $f(p)$ は単調減少関数であることに注意すると、 $h(p)$ の増減表は以下ようになる。

p	(0)	...	α	...
$h'(p)$		+	0	-
$h(p)$		$\nearrow$	$\alpha + \frac{1}{\alpha}$	$\searrow$

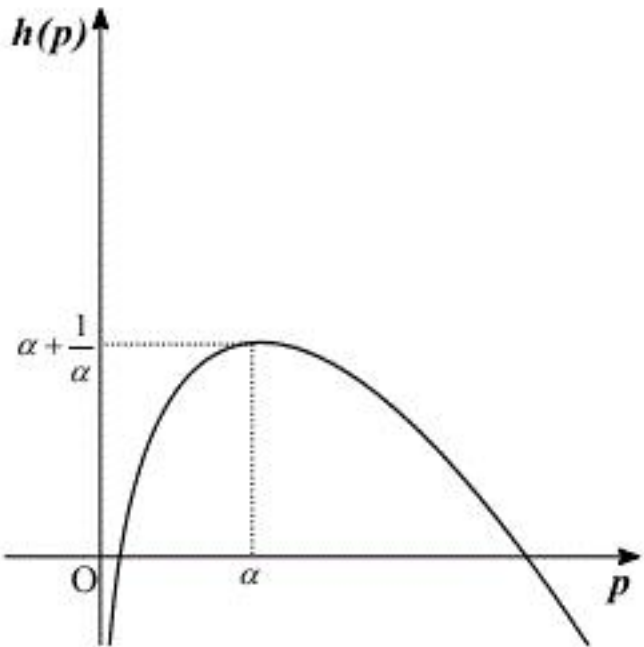
ここで、 $f(\alpha)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} - \log \alpha = 0$ より $\log \alpha = \frac{1}{\alpha}$ であるから、

$$\begin{aligned} h(\alpha) &= \alpha + (1-\alpha)\log \alpha + 1 \\ &= \alpha + \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow +0} h(p) &= \lim_{p \rightarrow +0} \{p + (1-p)\log p + 1\} = -\infty \\ \lim_{p \rightarrow \infty} h(p) &= \lim_{p \rightarrow \infty} p \left\{1 + \left(\frac{1}{p} - 1\right)\log p + \frac{1}{p}\right\} = -\infty \end{aligned}$$

を考慮すると、 $h(p)$ のグラフの概形は以下ようになる。



上図より、 $h(p) = \log c$ を満たす p が存在するには、 $\log c \leq \alpha + \frac{1}{\alpha}$ が必要である。逆に、この条件を満たすとき、2つの曲線が共通の接線を持つ。よって、求める正の定数 c の値の範囲は、 $0 < c \leq e^{\alpha + \frac{1}{\alpha}}$ である。

(答) $0 < c \leq e^{\alpha + \frac{1}{\alpha}}$