

【1】

【解答】

(1)	(ア)	(イ)	(2)	(ウ)	(エ)	(オ)
	$\frac{1}{3}\log 2$	$\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$		6	1	$-\frac{\sqrt{15}}{4}$
(3)	(カ)	(キ)	(4)	(ク)	(ケ)	(コ)
	$\theta=\frac{\pi}{6}$	$-6+4\sqrt{3}$		1	720	$\frac{4}{7}\pi$

【解説】

(1)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{1+3x^2} dx &= \int_0^1 \frac{1}{6} \cdot \frac{(1+3x^2)'}{1+3x^2} dx \\ &= \left[\frac{1}{6} \log(1+3x^2) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6} \log 4 \\ &= \frac{1}{3} \log 2\end{aligned}$$

となる。また、 $\int_0^1 \frac{1}{1+3x^2} dx$ について、 $x = \frac{1}{\sqrt{3}} \tan \theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\sqrt{3} \cos^2 \theta}$$

x	0	→	1
θ	0	→	$\frac{\pi}{3}$

となっているから

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{1+3x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{1}{\sqrt{3} \cos^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} [\theta]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{9} \pi\end{aligned}$$

となる。

(2)

$t = \sin x$ とおくと

$$16\sin^3 x - 24\sin^2 x + 9\sin x = 16t^3 - 24t^2 + 9t$$

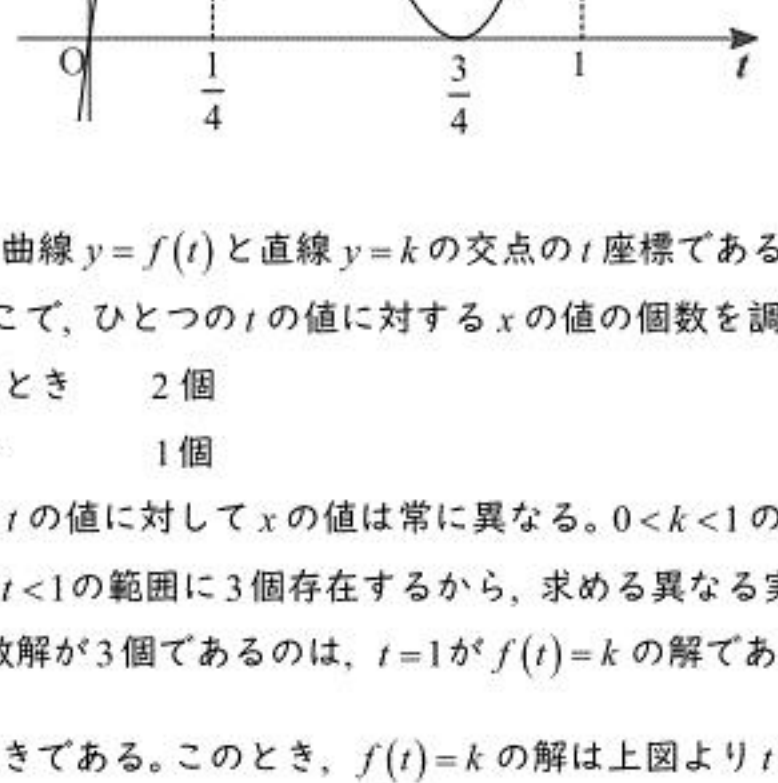
となる。上の式の右辺を $f(t)$ とおき、 $f(t) = k$ について考える。 $0 \leq x \leq \pi$ より $0 \leq t \leq 1$ である。ここで、 $f(t)$ を微分すると

$$\begin{aligned}f'(t) &= 48t^2 - 48t + 9 \\ &= 3(4t-1)(4t-3)\end{aligned}$$

であるから、増減表は次のようになる。

t	0	...	$\frac{1}{4}$	...	$\frac{3}{4}$	...	1
$f'(t)$		+	0	-	0	+	
$f(t)$	0	↗	1	↘	0	↗	1

よって、 $y = f(t)$ のグラフは次のようになる。



$f(t) = k$ の t の解は、曲線 $y = f(t)$ と直線 $y = k$ の交点の t 座標であるから、その個数は交点の数に一致する。ここで、ひとつの t の値に対する x の値の個数を調べると、 $0 \leq x \leq \pi$ より

$$\begin{cases} 0 \leq t < 1 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ t = 1 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \end{cases}$$

となる。また、異なる t の値に対して x の値は常に異なる。 $0 < k < 1$ のとき、上図より $f(t) = k$ の t の異なる解は $0 < t < 1$ の範囲に 3 個存在するから、求める異なる実数解の個数は 6 個である。また、異なる実数解が 3 個であるのは、 $t = 1$ が $f(t) = k$ の解である場合のみであり、これは上図より $k = 1$ のときである。このとき、 $f(t) = k$ の解は上図より $t = \frac{1}{4}, 1$ であり、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

かつ $\sin \theta = \frac{1}{4}$ を満たす実数 θ を考えると、 $k = 1$ のときの実数解は小さい順に $x = \theta, \frac{\pi}{2}, \pi - \theta$ である。よって、 $\alpha = \pi - \theta$ であるから

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \cos(\pi - \theta) \\ &= -\cos \theta \\ &= -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} \quad (\because \cos \theta > 0) \\ &= -\frac{\sqrt{15}}{4}\end{aligned}$$

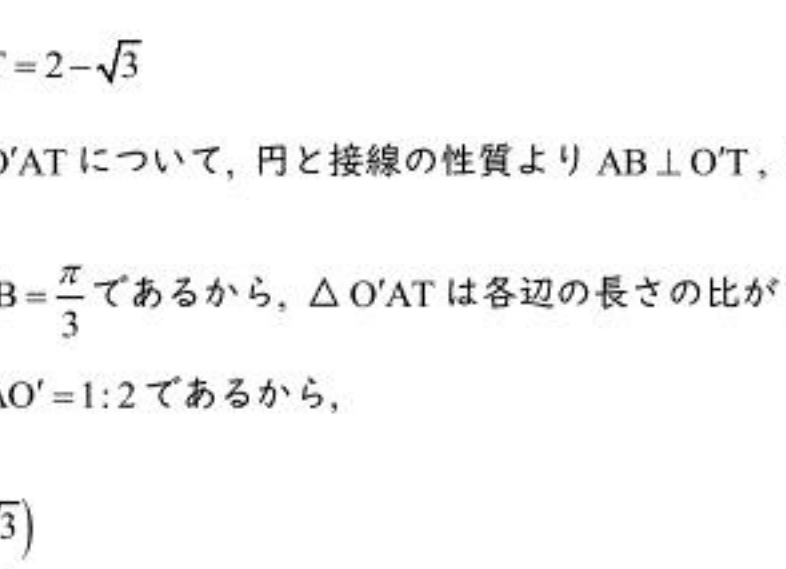
とわかる。

(3)

点 A、点 B の極座標より、 $OA = 1$ 、 $OB = \sqrt{3}$ 、 $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ であるから、 $\triangle OAB$ は各辺の長さの比が $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形である。このことから、 $AB = 2$ 、 $\angle OAB = \frac{\pi}{3}$ とわかる。一方で、直線 l と直線 AB の交点を点 S とすれば、 $\triangle OSA$ において $\angle OSA = \frac{\pi}{2}$ 、 $\angle SAO = \angle OAB = \frac{\pi}{3}$ であるから、

$$\begin{aligned}\angle SOA &= \pi - \angle SAO - \angle OSA \\ &= \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

とわかる。よって、直線 l の極方程式は $\theta = \frac{\pi}{6}$ である。



次に a の値について考える。極座標が $(a, 0)$ である点を点 C とする。 $r = 0$ のとき、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ において $r = a \cos \theta$ を満たすから、極方程式 $r = a \cos \theta$ の表す図形は原点を通る。また、 $r \neq 0$ のとき、極方程式 $r = a \cos \theta$ の xy 直交座標平面への変換を考えると、

$$\begin{aligned}r &= a \cos \theta \\ \Leftrightarrow r^2 &= ar \cos \theta \quad (\because r \neq 0) \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 &= ax \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2\end{aligned}$$

となるため、極方程式 $r = a \cos \theta$ の表す図形は極 O と点 C を直径の両端とする円である。この円の中心を点 O' 、円と直線 AB の接点を点 T とする。

$$BT = BO = \sqrt{3}$$

より

$$AT = AB - BT = 2 - \sqrt{3}$$

である。ここで、 $\triangle O'AT$ について、円と接線の性質より $AB \perp O'T$ 、すなわち $\angle ATO' = \frac{\pi}{2}$ であり、 $\angle O'AT = \angle OAB = \frac{\pi}{3}$ であるから、 $\triangle O'AT$ は各辺の長さの比が $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形である。よって、 $AT:AO' = 1:2$ であるから、

$$\begin{aligned}AO' &= 2AT \\ &= 2(2 - \sqrt{3}) \\ &= 4 - 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

とわかる。以上より

$$\begin{aligned}OC &= 2OO' \\ &= 2(OA - O'A) \\ &= 2\left\{1 - \left(4 - 2\sqrt{3}\right)\right\} \\ &= 4\sqrt{3} - 6\end{aligned}$$

である。よって、 $a = 4\sqrt{3} - 6$ とわかる。

(4)

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

とする。①の両辺に $z-1$ をかけると

$$\begin{aligned}(z-1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow z^7 - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow z^7 &= 1\end{aligned}$$

とわかる。複素数 z は①を満たすので、 $z \neq 0$ である。①の両辺を z^3 で割ると

$$z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。ここで $z + \frac{1}{z} = t$ とすると

$$\begin{aligned}z^2 + \frac{1}{z^2} &= \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 \\ &= t^2 - 2 \\ z^3 + \frac{1}{z^3} &= \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - 3\left(z + \frac{1}{z}\right) \\ &= t^3 - 3t\end{aligned}$$

であるから、②より

$$\begin{aligned}t^3 - 3t + t^2 - 2 + t + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow t^3 + t^2 - 2t &= 1\end{aligned}$$

である。さて、 $z^7 = 1$ に注意すると

$$\begin{aligned}(1+z)(2+2z^3)(3+3z^5)(4+4z^4)(5+5z^5)(6+6z^6) \\ = 6!(1+z)(1+z^2)(1+z^3) \cdot \frac{1}{z^2}(1+z^4) \cdot \frac{1}{z^2}(1+z^5) \cdot \frac{1}{z^2}(1+z^6) \\ = 6!(1+z)(1+z^2)(1+z^3) \left(1 + \frac{1}{z^2}\right) \left(1 + \frac{1}{z^2}\right) \left(1 + \frac{1}{z^2}\right) \\ = 6! \left(z + \frac{1}{z} + 2\right) \left(z^2 + \frac{1}{z^2} + 2\right) \left(z^3 + \frac{1}{z^3} + 2\right) \\ = 6!(t+2)t^2(t^3-3t+2) \\ = 6!(t+2)^2 t^2 (t-1)^2 \\ = 6!(t^3 + t^2 - 2t)^2 \\ = 6! \\ = 720\end{aligned}$$

とわかる。次に、 $|2 - z + \overline{z}|$ について考える。

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (r > 0, \theta = \arg z)$$

とすると、ド・モアブルの定理より

$$z^7 = r^7 (\cos 7\theta + i \sin 7\theta)$$

である。 $z^7 = 1$ と比較すると、整数 n を用いて

$$\begin{cases} r^7 = 1 \\ 7\theta = 2n\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{2n}{7}\pi \end{cases}$$

となる。ただし n は、 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ より、 $-1 \leq n \leq 3$ であり、①より $n \neq 0$ ($\because z \neq 1$) であるから、 $n = -1, 1, 2, 3$ である。さて、

$$\begin{aligned}|2 - z + \overline{z}| &= |2 - 2i \sin \theta| \\ &= 2\sqrt{1 + \sin^2 \theta}\end{aligned}$$

であるから、これが最大になるのは $|\sin \theta|$ が最大になるときである。 $\left|\sin \frac{2}{7}\pi\right| = \left|\sin\left(-\frac{2}{7}\pi\right)\right|$ より $n = 1, 2, 3$ について調べる。 $\frac{6}{7}\pi < \pi$ より、 $\theta = \frac{2}{7}\pi, \frac{4}{7}\pi, \frac{6}{7}\pi$ のうち最も $\frac{\pi}{2}$ に近いものが $|\sin \theta|$ を最大にする。

$$\begin{aligned}\left|\frac{2}{7}\pi - \frac{\pi}{2}\right| &= \frac{3}{14}\pi \\ \left|\frac{4}{7}\pi - \frac{\pi}{2}\right| &= \frac{\pi}{14} \\ \left|\frac{6}{7}\pi - \frac{\pi}{2}\right| &= \frac{5}{14}\pi\end{aligned}$$

より、求める偏角は $\frac{4}{7}\pi$ である。

【2】

(1)

条件より、各試行で青球を取り出す確率は $\frac{1}{2}$ 、赤球を取り出す確率は $\frac{1}{4}$ 、黄球を取り出す確率は $\frac{1}{4}$ である。よって

$$\begin{aligned} p_4(0) &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)^4 \\ &= \frac{1}{16} \\ q_4(1, 1) &= \frac{4!}{2!} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ &= \frac{3}{32} \end{aligned}$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad p_4(0) = \frac{1}{16}, q_4(1, 1) = \frac{3}{32}$$

(2)

$n \rightarrow \infty$ のときを考えるので、 $n \geq 2$ としてよい。このとき、二項定理より

$$\begin{aligned} (1+h)^n &= 1 + {}_n C_1 h + {}_n C_2 h^2 + \cdots + {}_n C_n h^n \\ &> {}_n C_2 h^2 \\ &= \frac{n(n-1)}{2} h^2 \end{aligned}$$

である。よって

$$0 < \frac{n}{(1+h)^n} < \frac{2n}{n(n-1)h^2} = \frac{2}{(n-1)h^2}$$

が成立する。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(n-1)h^2} = 0$$

より、はさみうちの原理から $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ である。

(証明終)

(3)

$$\begin{aligned} p_n(j) &= {}_n C_j \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \\ &= {}_n C_j \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ q_n(0, j) &= {}_n C_j \left(\frac{1}{4}\right)^{n-j} \left(\frac{1}{4}\right)^j \\ &= {}_n C_j \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{aligned}$$

である。よって、 $1 \leq j \leq n$ のとき $\frac{j}{n} {}_n C_j = {}_{n-1} C_{j-1}$ となるから

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{j=0}^n \frac{j}{n} p_n(j) + \sum_{j=0}^n (n-j) q_n(0, j) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(0 + \sum_{j=1}^n {}_{n-1} C_{j-1}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^n \sum_{j=0}^n (n-j) {}_n C_j \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{j=1}^n {}_{n-1} C_{j-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^n \sum_{j=0}^n (n-j) {}_n C_j \end{aligned}$$

となる。 $\sum_{j=1}^n {}_{n-1} C_{j-1}$ については、二項定理より

$$\begin{aligned} (1+x)^{n-1} &= \sum_{j=0}^{n-1} {}_{n-1} C_j x^j \\ &= \sum_{j=1}^n {}_{n-1} C_{j-1} x^{j-1} \end{aligned}$$

となるので、 $x=1$ を代入して、

$$\begin{aligned} (1+1)^{n-1} &= \sum_{j=1}^n {}_{n-1} C_{j-1} \\ \therefore \sum_{j=1}^n {}_{n-1} C_{j-1} &= 2^{n-1} \end{aligned}$$

とわかる。また、 $\sum_{j=0}^n (n-j) {}_n C_j$ については、 $n-j=k$ とすると

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n (n-j) {}_n C_j &= \sum_{k=0}^n k {}_n C_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n k {}_n C_k \\ &= n \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} {}_n C_k \\ &= n \left(0 + \sum_{k=1}^n {}_{n-1} C_{k-1}\right) \\ &= n 2^{n-1} \end{aligned}$$

とわかる。以上より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n 2^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^n n 2^{n-1} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} n \right\} \end{aligned}$$

である。(2)で $h=1$ としたとき、 $a_n = \frac{n}{2^n}$ となるので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$ となる。よって、

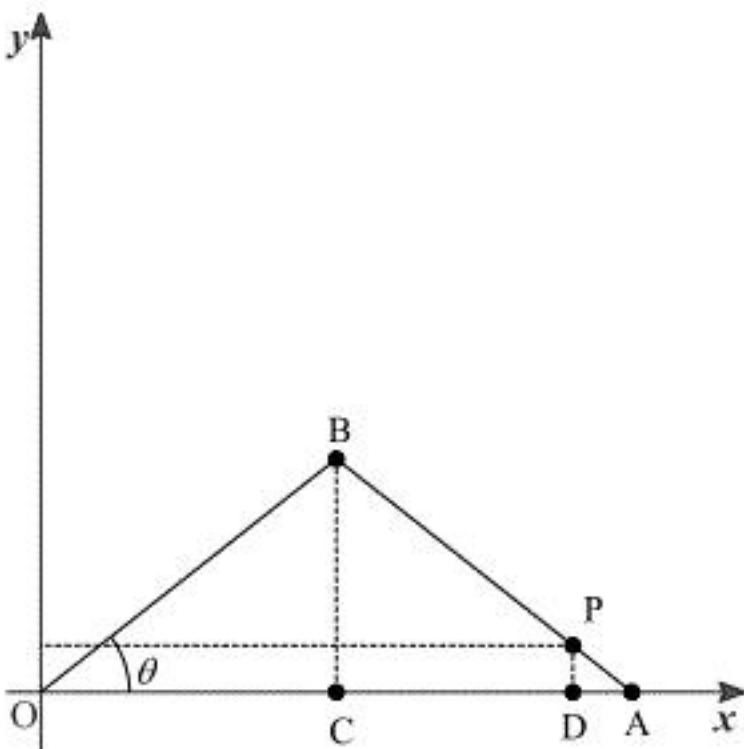
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2^n} = 0$$

であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2}$ となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2}$$

【3】

(1)



点 B の座標は $OB=1$ より、 $B(\cos \theta, \sin \theta)$ である。よって、 $OB=AB$ より、点 A の座標は $A(2\cos \theta, 0)$ である。また、点 B から x 軸におろした垂線の足を点 C、点 P から x 軸におろした垂線の足を点 D とすると、線分 BC と線分 PD は平行なので $\triangle ABC \sim \triangle APD$ である。よって、 $AB:AC=AP:AD$ 、 $CB:AB=DP:AP$ であり、 $AB=1$ 、 $BP=\cos \theta$ であるから、

$$\begin{aligned} OD &= OA - AD \\ &= 2\cos \theta - \frac{AC}{AB} AP \\ &= 2\cos \theta - \cos \theta (1 - \cos \theta) \\ &= \cos^2 \theta + \cos \theta \\ DP &= \frac{BC}{AB} AP \\ &= (1 - \cos \theta) \sin \theta \end{aligned}$$

となる。よって、点 P の座標は $P(\cos^2 \theta + \cos \theta, \sin \theta (1 - \cos \theta))$ である。

$$(\text{答}) \text{ 点 A : } x = 2\cos \theta, y = 0 \quad \text{点 P : } x = \cos^2 \theta + \cos \theta, y = \sin \theta (1 - \cos \theta)$$

(2)

求める長さを l とする。 θ の動く範囲は $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ であるから、

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

と表せる。(1)より

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= -2\sin \theta \cos \theta - \sin \theta \\ &= -\sin \theta (2\cos \theta + 1) \\ \frac{dy}{d\theta} &= \cos \theta - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \\ &= -2\cos^2 \theta + \cos \theta + 1 \\ &= (-\cos \theta + 1)(2\cos \theta + 1) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= (2\cos \theta + 1)^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2\cos \theta + 1) \\ &= 4(2\cos \theta + 1)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

となる。よって、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $2\cos \theta + 1 > 0$ 、 $\sin \frac{\theta}{2} \geq 0$ であるから、

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(2\cos \theta + 1) \sin \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4\cos^2 \frac{\theta}{2} - 1\right) \sin \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= -4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4\cos^2 \frac{\theta}{2} - 1\right) \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)' d\theta \\ &= -4 \left[\frac{4}{3} \cos^3 \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{4 + 2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

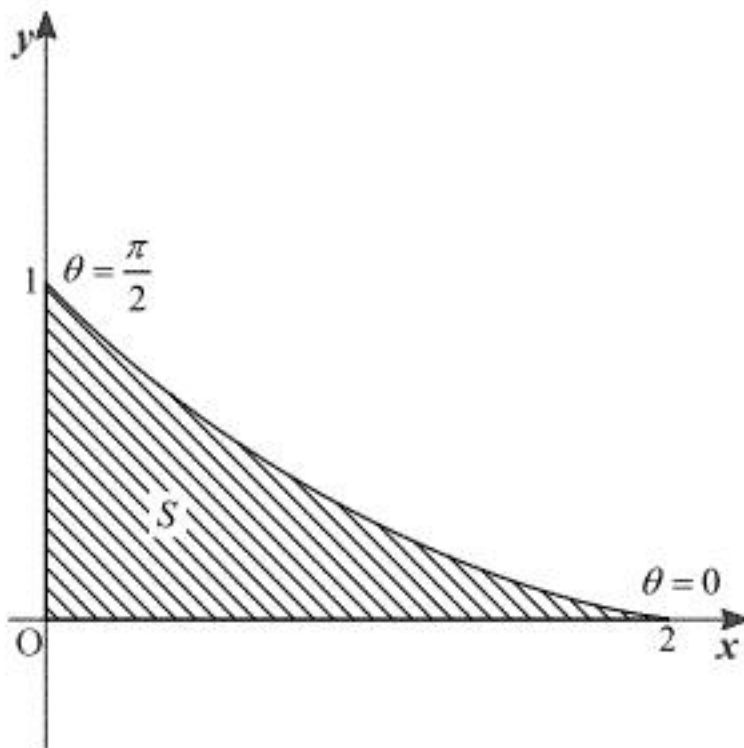
とわかる。

$$(\text{答}) \frac{4 + 2\sqrt{2}}{3}$$

(3)

求める面積を S とする。 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲において、 $\frac{dx}{d\theta} < 0$ 、 $\frac{dy}{d\theta} > 0$ であり、点 P の座標は

$\theta = 0$ のとき $P(2, 0)$ 、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき $P(0, 1)$ である。よって点 P の軌跡は下図のようになり、 S は斜線部の面積である。



以上より

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 y dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 y \frac{dx}{d\theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta (1 - \cos \theta) (2\cos \theta + 1) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 \theta + \sin^2 \theta \cos \theta - 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 \theta + \sin^2 \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \sin^2 \theta (\sin \theta)' - \frac{1 - \cos 4\theta}{4} \right) d\theta \\ &= \left[\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta + \frac{1}{3} \sin^3 \theta - \frac{1}{4} \theta + \frac{1}{16} \sin 4\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{\pi}{8} + \frac{1}{3}$$