

【1】

【解答】

(1)	$\boxed{\text{ア}}$	$\boxed{\text{イ}}$	$\boxed{\text{ウ}}$
	6	13	$8-8i$
(2)	$\boxed{\text{エ}}$	$\boxed{\text{オ}}$	$\boxed{\text{カ}}$
	$2\omega^2$	16	2π
(3)	$\boxed{\text{キ}}$	$\boxed{\text{ク}}$	
	$(t-1, t, t-4)$	7	
(4)	$\boxed{\text{ケ}}$	$\boxed{\text{コ}}$	$\boxed{\text{サ}}$
	1, 2	$(3, 2), (2, 4)$	$(1, 1, 2, 4)$

【解説】

(1)

x の方程式に $2+i$ を代入すると

$$(2+i)^3-(p-i)(2+i)^2+(q-pi)(2+i)-2p+\frac{3p}{2}i=0$$
$$\therefore -2-4p+2q+\left(14-\frac{9}{2}p+q\right)i=0$$

となる。 p, q は実数であるから、この等式が成立する条件は

$$\begin{cases} -2-4p+2q=0 \\ 14-\frac{9}{2}p+q=0 \end{cases}$$

である。この連立方程式を解いて

$$p=6, q=13$$

を得る。方程式が $2+i$ を解に持つので方程式を変形して

$$x^3-(6-i)x^2+(13-6i)x-12+9i=(x-2-i)\{x^2-(4-2i)x+(3-6i)\}$$

となるので α, β は $x^2-(4-2i)x+(3-6i)=0$ を解いて、

$$x^2-(4-2i)x+(3-6i)=0$$
$$\Leftrightarrow (x-3)(x-1+2i)=0$$
$$\therefore x=3, 1-2i$$

である。 $|3|=3, |1-2i|=\sqrt{5}$ より、 $|\alpha|<|\beta|$ であるから、

$$\alpha=1-2i, \beta=3$$

を得る。これを用いて、

$$\left(\frac{3-i}{1-2i}\right)^7=\left\{\frac{(3-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}\right\}^7$$
$$=(1+i)^7$$

となり、 $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ であるから、ド・モアブルの定理より

$$(1+i)^7=\sqrt{2}^7\left(\cos\frac{\pi}{4}\cdot 7+i\sin\frac{\pi}{4}\cdot 7\right)$$
$$=8\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$
$$=8-8i$$

である。

(2)

$x=2(\omega t-\sin\omega t), y=2(1-\cos\omega t)$ より、

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=2\omega-2\omega\cos\omega t \\ \frac{dy}{dt}=2\omega\sin\omega t \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2}=2\omega^2\sin\omega t \\ \frac{d^2y}{dt^2}=2\omega^2\cos\omega t \end{cases}$$

となる。すなわち、位置を時間で2回微分したものが加速度であるから

$$|a|=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$
$$=\sqrt{(2\omega^2\sin\omega t)^2+(2\omega^2\cos\omega t)^2}$$
$$=2\omega^2$$

である。点Pが動く道のりは

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$

と表される。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=2\omega-2\omega\cos\omega t \\ \frac{dy}{dt}=2\omega\sin\omega t \end{cases}$$

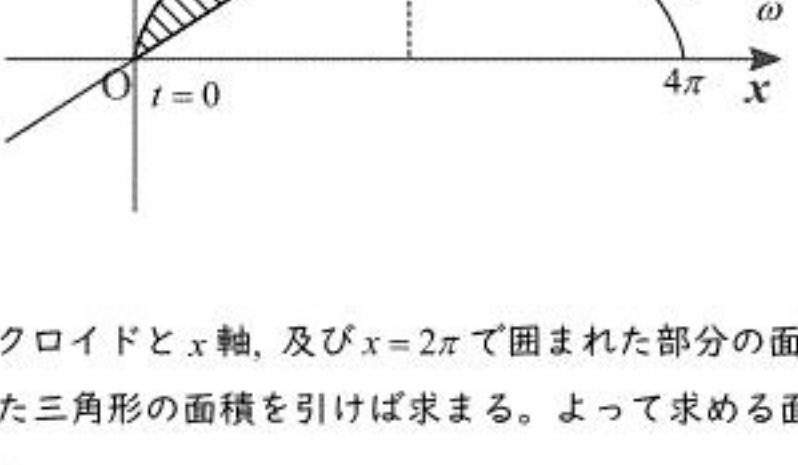
であることを用いれば、道のりは

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$
$$=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sqrt{(2\omega-2\omega\cos\omega t)^2+(2\omega\sin\omega t)^2}dt$$
$$=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sqrt{4\omega^2-8\omega^2\cos\omega t+4\omega^2\cos^2\omega t+4\omega^2\sin^2\omega t}dt$$
$$=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sqrt{8\omega^2-8\omega^2\cos\omega t}dt$$
$$=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sqrt{16\omega^2\sin^2\frac{\omega t}{2}}dt$$
$$=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}4\omega\left|\sin\frac{\omega t}{2}\right|dt\left(\because\omega>0\right)$$
$$=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}4\omega\sin\frac{\omega t}{2}dt\left(\because 0<\frac{\omega t}{2}<\pi\right)$$
$$=\left[-8\cos\frac{\omega t}{2}\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}}$$
$$=16$$

である。ここで、 $0\leq t\leq\frac{2\pi}{\omega}$ における増減表は以下のようになる。

t	0	...	$\frac{\pi}{\omega}$	...	$\frac{2\pi}{\omega}$
$\frac{dx}{dt}$	0	+		+	
$\frac{dy}{dt}$	0	+	0	-	0
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\nearrow$	$\begin{pmatrix} 2\pi \\ 4 \end{pmatrix}$	$\searrow$	$\begin{pmatrix} 4\pi \\ 0 \end{pmatrix}$

したがって、サイクロイドの軌跡と直線 l の位置関係は下図のようになり、求める面積は下図の斜線部である。



斜線部の面積はサイクロイドと x 軸、及び $x=2\pi$ で囲まれた部分の面積から直線 l と x 軸、及び $x=2\pi$ で囲まれた三角形の面積を引けば求まる。よって求める面積を S とすると

$$S=\int_0^{2\pi}ydx-\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot 4$$

である。ここで

$$\frac{dx}{dt}=2\omega-2\omega\cos\omega t$$
$$\Leftrightarrow dx=(2\omega-2\omega\cos\omega t)dt$$

と $y=2(1-\cos\omega t)$ を代入すれば、求める面積は

$$S=\int_0^{2\pi}ydx-\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot 4$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}2(1-\cos\omega t)(2\omega-2\omega\cos\omega t)dt-4\pi$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}4\omega(1-2\cos\omega t+\cos^2\omega t)dt-4\pi$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}4\omega\left(\frac{3}{2}-2\cos\omega t+\frac{\cos 2\omega t}{2}\right)dt-4\pi$$
$$=[6\omega t-8\sin\omega t-\sin 2\omega t]_0^{\frac{\pi}{\omega}}-4\pi$$
$$=2\pi$$

である。

(3)

点Pのある時刻 t における座標を実数 p を用いて表すと

$$\overrightarrow{\text{OP}}=\overrightarrow{\text{OA}}+pt\overrightarrow{\text{a}}$$
$$=(-1+pt, pt, -4+pt)$$

であり、点Pの x 座標は $t=10$ で $x=9$ である。よって $p=1$ と求まるので $0\leq t\leq 10$ における $\overrightarrow{\text{OP}}$ の各成分は

$$\overrightarrow{\text{OP}}=(t-1, t, t-4)$$

である。 $0\leq t\leq 2$ における $\overrightarrow{\text{OQ}}$ の各成分は、点Bで静止しているから、

$$\overrightarrow{\text{OQ}}=(4, -5, 0)$$

である。 $2< t\leq 10$ における点Qの座標を実数 q を用いて表すと

$$\overrightarrow{\text{OQ}}=\overrightarrow{\text{OB}}+q(t-2)\overrightarrow{p}$$
$$=(4-q(t-2), -5+2q(t-2), 0)$$

である。点Qの x 座標は $t=10$ で $x=0$ である。よって $q=\frac{1}{2}$ と求まるので $2< t\leq 10$ における $\overrightarrow{\text{OQ}}$ の各成分は

$$\overrightarrow{\text{OQ}}=\left(-\frac{t}{2}+5, t-7, 0\right)$$

である。以上を用いて $|\overrightarrow{\text{PQ}}|$ を求める。

[1] $0\leq t\leq 2$ のとき

$$\overrightarrow{\text{PQ}}=(4-(t-1), -5-t, 0-(t-4))$$
$$=(-t+5, -t-5, -t+4)$$

であるので $|\overrightarrow{\text{PQ}}|$ は

$$|\overrightarrow{\text{PQ}}|=\sqrt{(-t+5)^2+(-t-5)^2+(-t+4)^2}$$
$$=\sqrt{3t^2-8t+66}$$
$$=\sqrt{3\left(t-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{182}{3}}$$

である。よって、 $0\leq t<2$ のとき、 $|\overrightarrow{\text{PQ}}|$ の最小値は $\sqrt{\frac{182}{3}}=\frac{\sqrt{546}}{3}$ であり、時刻は $t=\frac{4}{3}$ である。

[2] $2< t\leq 10$ のとき

$$\overrightarrow{\text{PQ}}=\left(-\frac{t}{2}+5-(t-1), t-7-t, 0-(t-4)\right)$$
$$=\left(-\frac{3}{2}t+6, -7, -t+4\right)$$

であるので $|\overrightarrow{\text{PQ}}|$ は

$$|\overrightarrow{\text{PQ}}|=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}t+6\right)^2+(-7)^2+(-t+4)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{13}{4}(t-4)^2+49}$$

である。よって、 $2< t\leq 10$ のとき、 $|\overrightarrow{\text{PQ}}|$ の最小値は $\sqrt{49}=7$ であり、時刻は $t=4$ である。

以上[1],[2]より、 $7<\frac{23}{3}=\frac{\sqrt{529}}{3}<\frac{\sqrt{546}}{3}$ であるから $|\overrightarrow{\text{PQ}}|$ の最小値は7である。

(4)

与えられた方程式を変形すると

$$\frac{1}{x}=\frac{7}{3}-\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{3w}\right)$$

であり y, z, w が自然数であることを用いれば

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{3w}\leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$$

を得る。これを先ほどの式に用いれば

$$\frac{1}{x}=\frac{7}{3}-\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{3w}\right)\geq \frac{7}{3}-\frac{11}{6}=\frac{1}{2}$$

となるので x のとり得る値は1または2である。

[1] $x=1$ のとき

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{3w}=\frac{4}{3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{y}=\frac{4}{3}-\left(\frac{1}{2z}+\frac{1}{3w}\right)$$

であり、 $z\geq 1, w\geq 1$ より、

$$\frac{1}{2z}+\frac{1}{3w}\leq \frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

を得る。よって、

$$\frac{1}{y}=\frac{4}{3}-\left(\frac{1}{2z}+\frac{1}{3w}\right)\geq \frac{4}{3}-\frac{5}{6}=\frac{1}{2}$$

である。よって y がとり得る値は1または2である。 $y=1$ を代入すれば

$$\frac{1}{2z}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3w}$$

となるので w に順番に自然数を代入することにより自然数の組

$$(x, y, z, w)=(1, 1, 3, 2), (1, 1, 2, 4)$$

を得る。 $w>4$ のときは

$$\frac{1}{3w}<\frac{1}{12}$$

となるので

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}<\frac{1}{3}-\frac{1}{3w}<\frac{1}{2}$$

より、等式を満たす自然数 z が存在しない。 $y=2$ となるときは自然数の組 (x, y, z, w) は $(1, 2, 1, 1)$ のみである。

[2] $x=2$ のとき

$$\frac{1}{y}=\frac{4}{3}-\left(\frac{1}{2z}+\frac{1}{3w}\right)$$

となるので[1]と同様にして求めると自然数 (x, y, z, w) の組は $(2, 1, 1, 1)$ のみである。

以上[1],[2]より、自然数の組 (x, y, z, w) のうち $xyzw$ を最大にするものは

$$(x, y, z, w)=(1, 1, 2, 4)$$

である。

【2】

(1)

球が点 Z_1 , 点 Z_2 にある事象を (Z_1, Z_2) , どの点にも球が置かれていない事象を (0) と表す。
 2つの球を区別して考えると, 1回目の操作が終了した後の球の位置として考えられるものは $(A, A)(A, C)(C, A)(C, C)$ の4通りでありそれぞれ起こる確率は $\frac{1}{4}$ である。2つの球が同じ点に置かれた場合は球を取り除くので, $(A, A), (C, C)$ は (0) に等しい。以降2つの球を区別しないで考えると1回目の操作が終了した時点での球の位置は (A, C) または (0) でありそれぞれの確率は $\frac{1}{2}$ である。1回目に球の位置が (A, C) となったとすると2回目の操作終了後の球の位置は $(B, P), (D, P), (B, D), (B, Q), (D, Q), (0)$ のいずれかであり, それぞれの事象の確率は $\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}$ である。よって X_2 , すなわち2回の操作終了後に (0) でない確率は

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

である。

(答) $\frac{1}{3}$

(2)

3回目の操作終了後の球の位置は $(A, C), (0)$ であり, 2回目の操作が終了した時点で $(B, P), (D, P), (B, D), (B, Q), (D, Q)$ となっている事象のうちその後に (A, C) となる確率は全ての事象において $\frac{1}{2}$ である。3回目の操作終了後に (0) でない確率 X_3 は(2)を用いて

$$X_2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

である。

(答) $\frac{1}{6}$

(3)

1回目と3回目の操作終了後の球の位置として考えられるものは $(A, C), (0)$ であり, 以降も同様の操作を繰り返していくので $2k-1$ 回目の操作終了後の球の位置は $(A, C), (0)$ である。球の位置が (A, C) となっている事象から2回の操作を経てまた (A, C) となる確率は(1), (2)より

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

である。 X_{2k-1} は1回目の操作で (A, C) となり, 以降の操作で2回ごとに (A, C) となることを $k-1$ 回繰り返す確率なので

$$X_{2k-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^{k-1}$$

と表せる。

(答) $X_{2k-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^{k-1}$

(4)

(A, C) の事象から1回の操作を加えて (P, Q) となる確率は $\frac{1}{9}$ である。 n 回目の操作を終えた時, それまでの操作で, 各球が同時に点 P と点 Q に置かれることにより経路上から取り除かれている確率は2, 4, ... 回目の操作後に (P, Q) となって球が取り除かれた確率を足し合わせることで求められる。 $2k-1$ 回目の操作後に (A, C) となっておりそのあとの操作で (P, Q) となる確率は

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^{k-1} \cdot \frac{1}{9}$$

である。これを $k=1, 2, \dots$ について足し合わせる。

[1] n が偶数のとき

求める確率は

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^{k-1} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{18} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{n}{2}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{12} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{n}{2}} \right\}$$

である。

[2] n が奇数のとき

求める確率は, $n \geq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^{k-1} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{18} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{n-1}{2}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{12} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{n-1}{2}} \right\}$$

である。これは $n=1$ の時も成り立つ。

(答) n が偶数のとき: $\frac{1}{12} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{n}{2}} \right\}$, n が奇数のとき: $\frac{1}{12} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{n-1}{2}} \right\}$

【3】

(1)

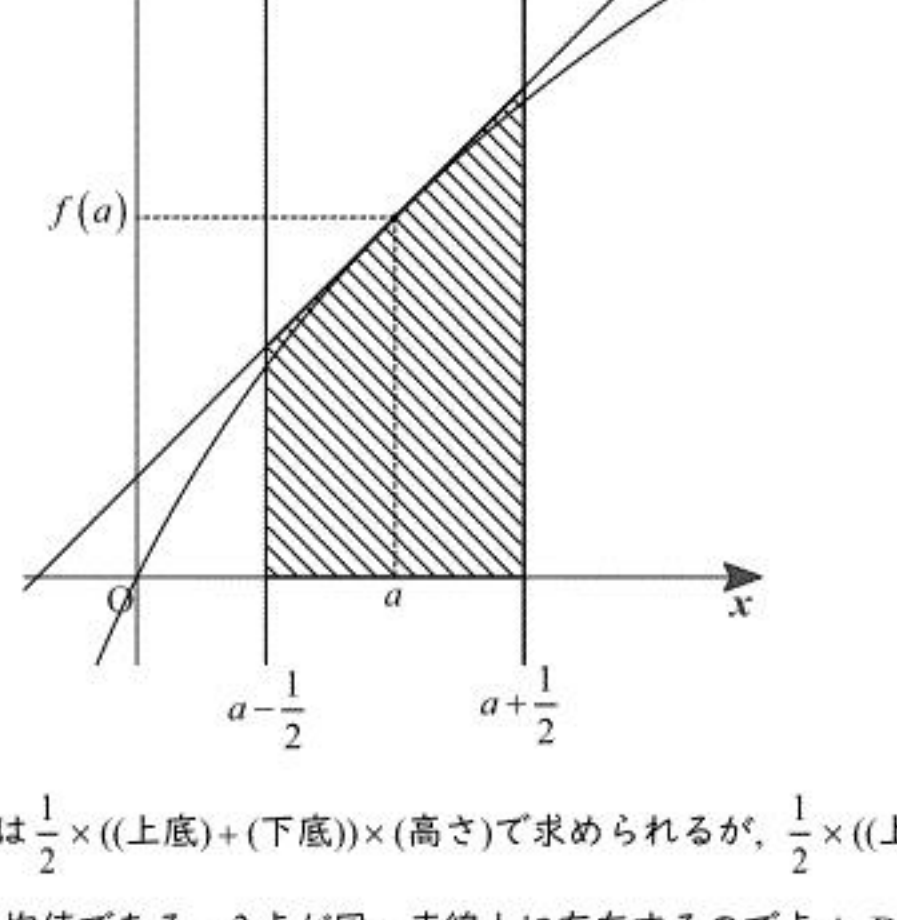
$y=f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線と直線 $x=a-\frac{1}{2}, x=a+\frac{1}{2}$ の交点をA, Bとおくと、

$f''(x)<0$ より $y=f(x)$ は $x>-1$ で上に凸の関数なので $y=f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接

線を $y=g(x)$ とおけば、 $a-\frac{1}{2}\leq x\leq a+\frac{1}{2}(x\neq a)$ において $f(x)<g(x)$ が成り立つ。よって、

$f''(x)>0$ より、 $y=f(x)$ が単調増加であることもふまえると、 $y=f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ に

おける接線、直線 $x=a-\frac{1}{2}, x=a+\frac{1}{2}$ および x 軸で囲まれた部分は下図の斜線部の台形で表される。



斜線部の台形の面積は $\frac{1}{2}\times((\text{上底})+(\text{下底}))\times(\text{高さ})$ で求められるが、 $\frac{1}{2}\times((\text{上底})+(\text{下底}))$ とは

点A, Bの y 座標の平均値である。2点が同一直線上に存在するので点A, Bの y 座標の平均

値は2点の中間の y 座標である。点A, Bの中間の座標は $(a, f(a))$ であることを用いて、 $\frac{1}{2}\times$

$((\text{上底})+(\text{下底}))$ は $f(a)$ である。台形の高さは

$$a+\frac{1}{2}-\left(a-\frac{1}{2}\right)=1$$

である。以上から台形の面積は

$$\frac{1}{2}\times((\text{上底})+(\text{下底}))\times(\text{高さ})=f(a)\cdot 1=f(a)$$

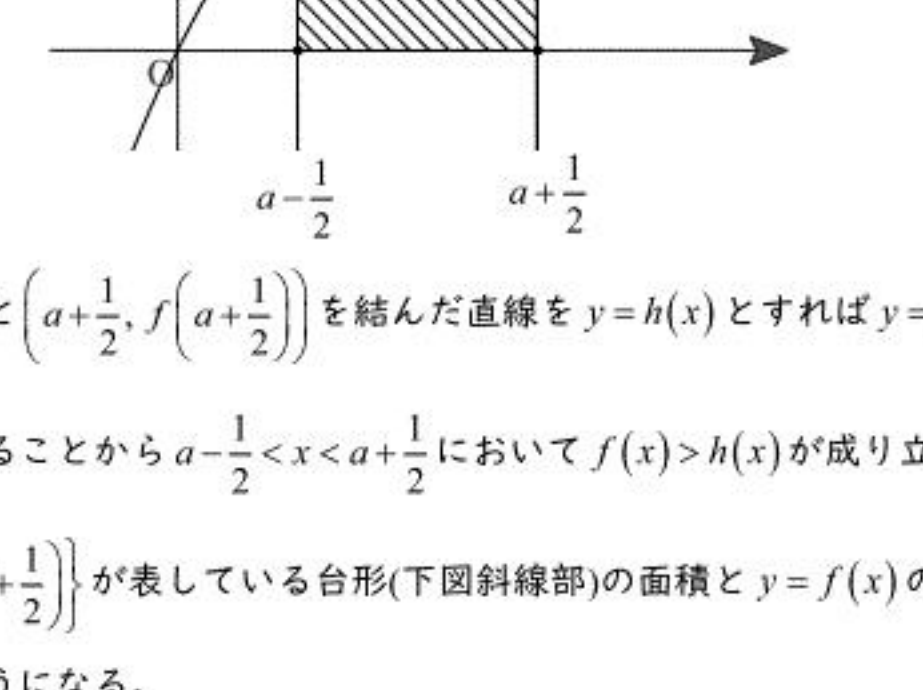
である。

(証明終)

(2)

まず $\frac{1}{2}\left\{f\left(a-\frac{1}{2}\right)+f\left(a+\frac{1}{2}\right)\right\}<\int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}}f(x)dx$ を示す。 $\int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}}f(x)dx$ は下図の斜線部の面積を表

している。

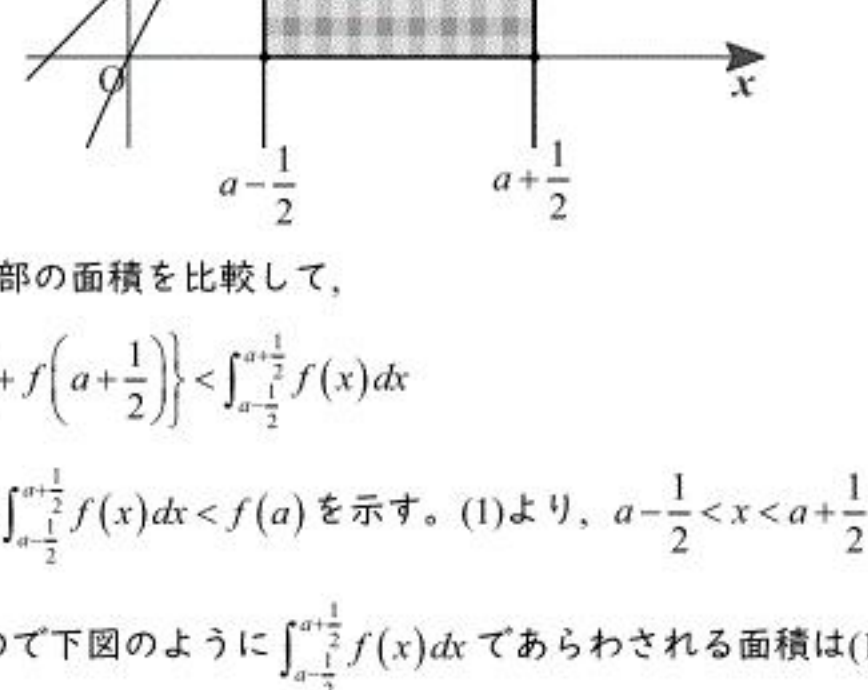


$\left(a-\frac{1}{2}, f\left(a-\frac{1}{2}\right)\right)$ と $\left(a+\frac{1}{2}, f\left(a+\frac{1}{2}\right)\right)$ を結んだ直線を $y=h(x)$ とすれば $y=f(x)$ は $x>-1$ で

上に凸の関数であることから $a-\frac{1}{2}<x<a+\frac{1}{2}$ において $f(x)>h(x)$ が成り立つ。よって

$\frac{1}{2}\left\{f\left(a-\frac{1}{2}\right)+f\left(a+\frac{1}{2}\right)\right\}$ が表している台形(下図斜線部)の面積と $y=f(x)$ のグラフ上での位

置関係は下図のようになる。



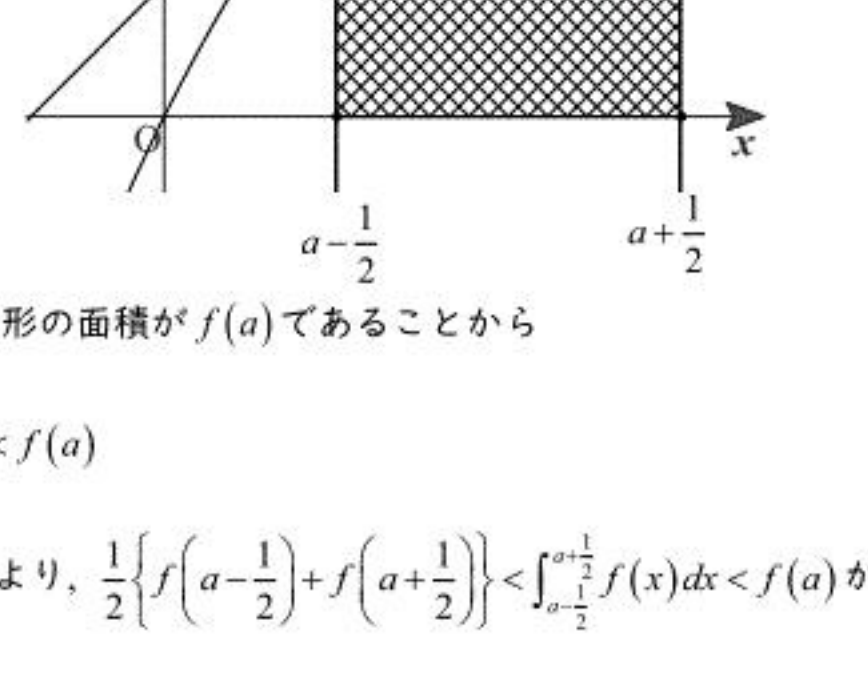
以上二つの図の斜線部の面積を比較して、

$$\frac{1}{2}\left\{f\left(a-\frac{1}{2}\right)+f\left(a+\frac{1}{2}\right)\right\}<\int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}}f(x)dx$$

が証明された。次に $\int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}}f(x)dx<f(a)$ を示す。(1)より、 $a-\frac{1}{2}<x<a+\frac{1}{2}$ において

$f(x)<g(x)$ であるので下図のように $\int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}}f(x)dx$ であらわされる面積は(1)で求めた台形の

中に含まれる。



よって(1)で求めた台形の面積が $f(a)$ であることから

$$\int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}}f(x)dx<f(a)$$

が証明された。以上より、 $\frac{1}{2}\left\{f\left(a-\frac{1}{2}\right)+f\left(a+\frac{1}{2}\right)\right\}<\int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}}f(x)dx<f(a)$ が示された。

(証明終)

(3)

$\int_{\frac{1}{2}}^nf(x)dx<\sum_{k=1}^nf(k)$ を示す。(2)より自然数 k についても

$$\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}f(x)dx<f(k)$$

が成り立つ。この式の両辺を $k=1$ から $k=n$ まで足し合わせれば

$$\sum_{k=1}^n\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}f(x)dx<\sum_{k=1}^nf(k)$$

$$\Leftrightarrow\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}f(x)dx<\sum_{k=1}^nf(k)$$

である。 $f'(x)>0, f(0)=0$ より $x>0$ で $f(x)>0$ であるから

$$\int_{\frac{1}{2}}^nf(x)dx<\int_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}f(x)dx$$

を得る。以上より

$$\int_{\frac{1}{2}}^nf(x)dx<\sum_{k=1}^nf(k)$$

が示された。次に $\sum_{k=1}^nf(k)<\int_0^n f(x)dx+\frac{1}{2}f(n)$ を示す。(2)より

$$\frac{1}{2}\left\{f\left(a-\frac{1}{2}\right)+f\left(a+\frac{1}{2}\right)\right\}<\int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}}f(x)dx$$

であるから a に $k-\frac{1}{2}$ を代入して整理した

$$\frac{1}{2}\{f(k-1)+f(k)\}<\int_{k-1}^kf(x)dx$$

が成り立つ。この式の両辺を $k=1$ から $k=n$ まで足し合わせれば

$$\sum_{k=1}^n\frac{1}{2}\{f(k-1)+f(k)\}<\sum_{k=1}^n\int_{k-1}^kf(x)dx$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}f(0)+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)+\frac{1}{2}f(n)<\int_0^n f(x)dx$$

となる。両辺に $\frac{1}{2}f(n)$ を足し、 $f(0)=0$ であることを用いれば

$$\sum_{k=1}^{n-1}f(k)+f(n)<\int_0^n f(x)dx+\frac{1}{2}f(n)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{k=1}^nf(k)<\int_0^n f(x)dx+\frac{1}{2}f(n)$$

を得る。これで不等式は示された。

(証明終)

(4)

$(n!)^{\frac{1}{n\log n}}>0$ より、 $(n!)^{\frac{1}{n\log n}}$ の自然対数をとれば

$$\frac{1}{n\log n}\log(n!)$$

$$=\frac{1}{n\log n}\{\log n+\log(n-1)+\cdots+\log 1\}$$

$$=\frac{1}{n\log n}\sum_{k=1}^{n-1}\log(k+1)$$

を得る。ここで $f(x)=\log(x+1)$ は問題の条件を満たす関数であることを用いれば(3)より2

以上の自然数 n に対し

$$\int_{\frac{1}{2}}^{n-1}\log(x+1)dx<\sum_{k=1}^{n-1}\log(k+1)<\int_0^{n-1}\log(x+1)dx+\frac{1}{2}\log n$$

が成り立つので、各辺に $\frac{1}{n\log n}(>0)$ をかけると

$$\frac{1}{n\log n}\int_{\frac{1}{2}}^{n-1}\log(x+1)dx<\frac{1}{n\log n}\sum_{k=1}^{n-1}\log(k+1)<\frac{1}{n\log n}\left\{\int_0^{n-1}\log(x+1)dx+\frac{1}{2}\log n\right\}$$

を得る。この式の左辺は

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n\log n}\int_{\frac{1}{2}}^{n-1}\log(x+1)dx=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n\log n}\left\{\left[x\log(x+1)\right]_{\frac{1}{2}}^{n-1}-\int_{\frac{1}{2}}^{n-1}\frac{x}{x+1}dx\right\}$$

$$=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n\log n}\left\{(n-1)\log n-\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}-\int_{\frac{1}{2}}^{n-1}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx\right\}$$

$$=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n\log n}\left\{(n-1)\log n-\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}-\left[x-\log(x+1)\right]_{\frac{1}{2}}^{n-1}\right\}$$

$$=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n\log n}\left\{(n-1)\log n-\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}-(n-1)+\log n+\frac{1}{2}-\log\frac{3}{2}\right\}$$

$$=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n\log n}\left(n\log n-n+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\log\frac{3}{2}\right)$$

$$=\lim_{n\rightarrow\infty}\left\{1-\frac{1}{\log n}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n\log n}\left(1-\log\frac{3}{2}\right)\right\}$$

$$=1$$

である。右辺は

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n\log n}\left\{\int_0^{n-1}\log(x+1)dx+\frac{1}{2}\log n\right\}=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n\log n}\left\{\left[x\log(x+1)\right]_0^{n-1}-\int_0^{n-1}\frac{x}{x+1}dx+\frac{1}{2}\log n\right\}$$

$$=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n\log n}\left\{(n-1)\log n-\int_0^{n-1}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx+\frac{1}{2}\log n\right\}$$

$$=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n\log n}\left\{(n-1)\log n-\left[x-\log(x+1)\right]_0^{n-1}+\frac{1}{2}\log n\right\}$$

$$=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n\log n}\left\{(n-1)\log n-(n-1)+\log n+\frac{1}{2}\log n\right\}$$

$$=\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n\log n}\left(n\log n+\frac{1}{2}\log n-n+1\right)$$

$$=\lim_{n\rightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{\log n}+\frac{1}{n\log n}\right)$$

$$=1$$

となる。以上より、はさみうちの原理から、

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n\log n}\sum_{k=1}^{n-1}\log(k+1)=1$$

である。よって

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\log(n!)^{\frac{1}{n\log n}}=1$$

となり、対数関数の連続性により、

$$\log\lim_{n\rightarrow\infty}(n!)^{\frac{1}{n\log n}}=1$$

であるから、

$$\lim_{n\rightarrow\infty}(n!)^{\frac{1}{n\log n}}=e^1=e$$

を得る。

(答) e