

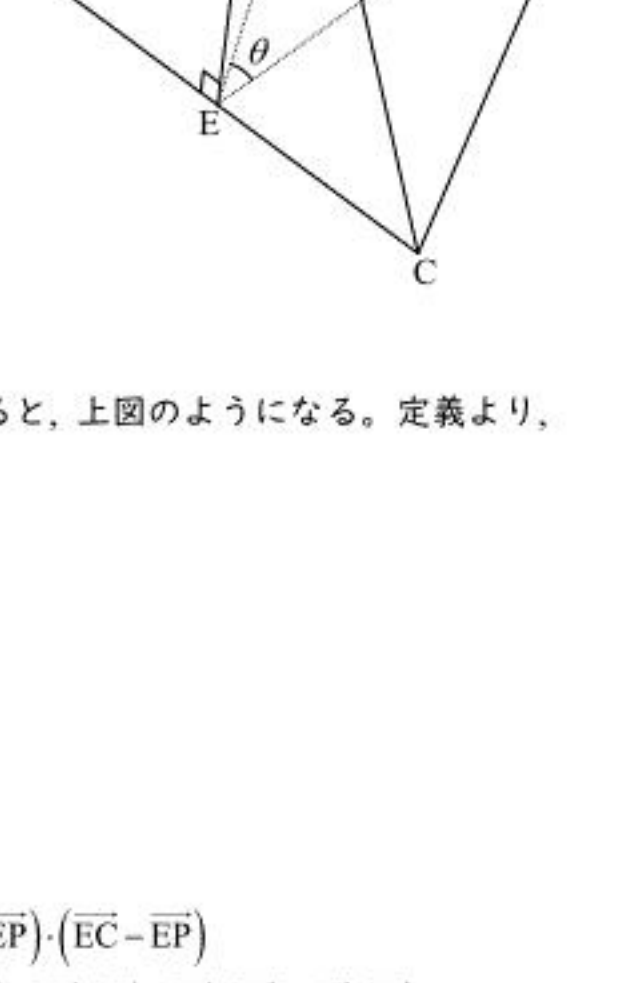
【1】

【解答】

(1)	(ア)	-1	(イ)	$3-6\cos\theta$	(ウ)	1	(エ)	$\frac{\sqrt{6}}{3}$
(2)	(オ)	$\frac{5}{12}\pi$	(カ)	$\sqrt{2}$	(キ)	$\frac{\sqrt{3}-3}{2}$	(ク)	8
(3)	(ケ)	3	(コ)	$\frac{3a^2}{a^4+1}$	(サ)	$\frac{3}{2}$		
(4)	(シ)	$2e^{-2\cos 1}$	(ス)	$2e^{4\cos 1}-e^{2\cos 1}$	(セ)	$\frac{7}{96}\pi e^2$		

【解説】

(1)



問題文の状況を図示すると、上図のようになる。定義より、

$$\begin{aligned} PE &= \frac{1}{2}AE \\ &= \frac{1}{2}AB\sin\frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 4\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC} &= (\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{EP})\cdot(\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{EP}) \\ &= \overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EP}-\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{EP} \\ &= |\overrightarrow{EB}||\overrightarrow{EC}|\cos\pi-|\overrightarrow{EB}||\overrightarrow{EP}|\cos\frac{\pi}{2}-|\overrightarrow{EP}||\overrightarrow{EC}|\cos\frac{\pi}{2}+|\overrightarrow{EP}|^2 \\ &= 2\cdot 2\cdot (-1)-0-0+(\sqrt{3})^2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

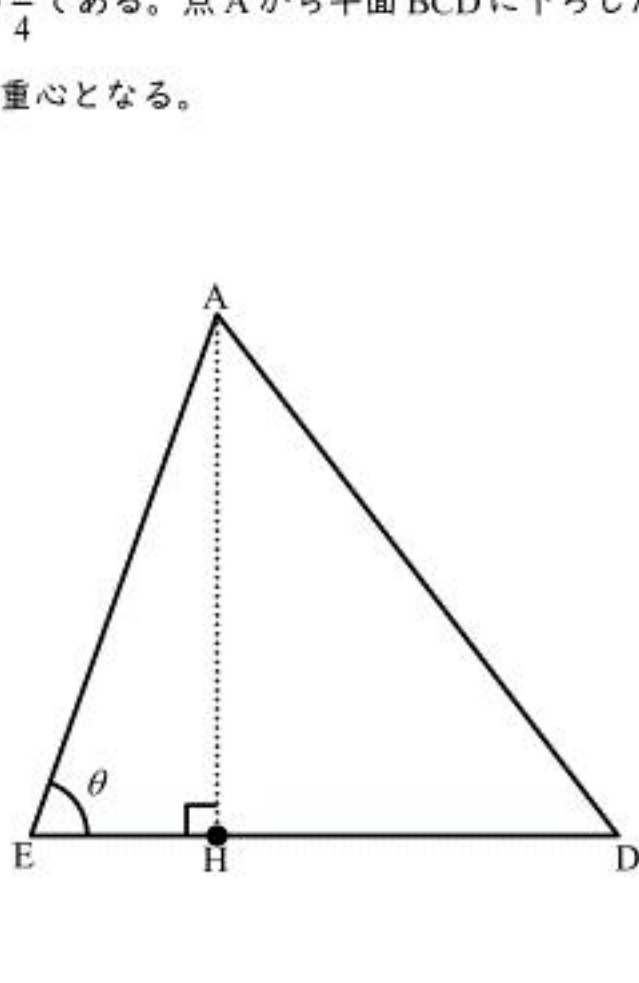
となる。同様に計算すると、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD} &= (\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{EP})\cdot(\overrightarrow{ED}-\overrightarrow{EP}) \\ &= \overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}-\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{EP}-\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{EP} \\ &= |\overrightarrow{EC}||\overrightarrow{ED}|\cos\frac{\pi}{2}-|\overrightarrow{EC}||\overrightarrow{EP}|\cos\frac{\pi}{2}-|\overrightarrow{EP}||\overrightarrow{ED}|\cos\theta+|\overrightarrow{EP}|^2 \\ &= 0-0-\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\cos\theta+(\sqrt{3})^2 \\ &= 3-6\cos\theta \end{aligned}$$

となる。 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}$ が最大値をとるのは、 $\cos\theta$ が最小となるときであり、 $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ より、それは θ が最大となるときである。よって、 $\theta=\angle AED$ のときを考える。 $\triangle AED$ に余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-4^2}{2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

であるので、 $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PD}$ の最大値は $3-6\cdot\frac{1}{3}=1$ となる。また、このとき点Pは線分AEの中点である。直線BPと線分ACの交点を点Qとおく。

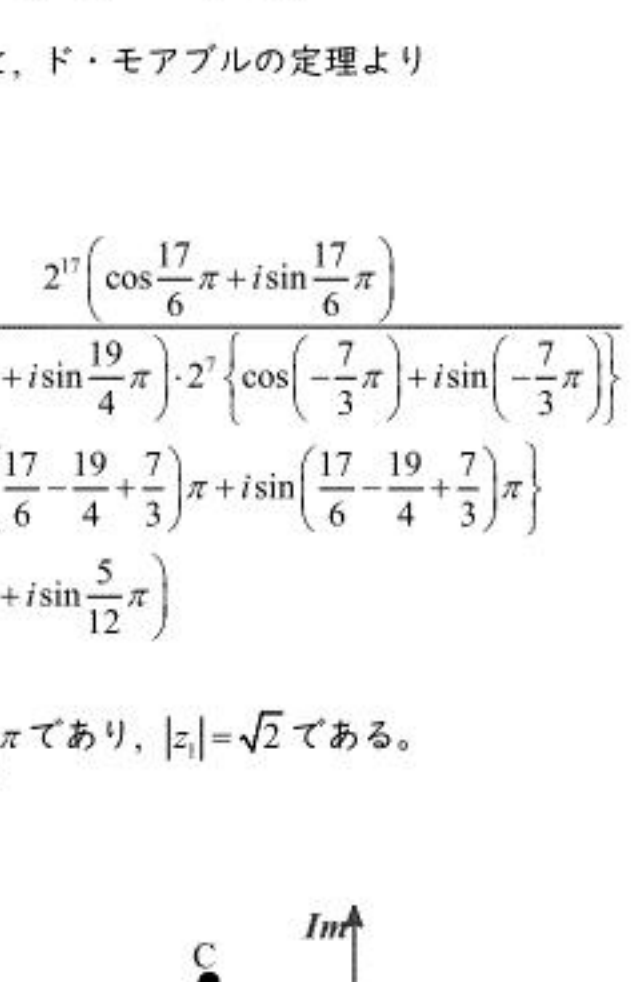


上図において点Eを通りACと平行な直線と線分BQの交点を点Rとする。このとき、 $BE=EC$ より、 $BR=RQ$ である。また、点Eを通りACと平行な直線を見ると、 $EP=PA$ より $RP=PQ$ である。したがって、 $BP:PQ=3:1$ となる。このとき、

$$(P-ACDの体積)=\frac{1}{4}\times(B-ACDの体積)$$

が成り立つことから、点Pと平面ACDの距離は、点Bと平面ACDの距離の $\frac{1}{4}$ となる。すなわち、正四面体の高さの $\frac{1}{4}$ である。点Aから平面BCDに下ろした垂線の足を点Hとすると、

点Hは正三角形BCDの重心となる。



$EH:HD=1:2$ であるので、上図より、正四面体の高さAHは、

$$\begin{aligned} AH &= \sqrt{AE^2-EH^2} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{3})^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} \\ &= \frac{4\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

となる。よって、点Pと平面ACDの距離は、 $\frac{4\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ である。

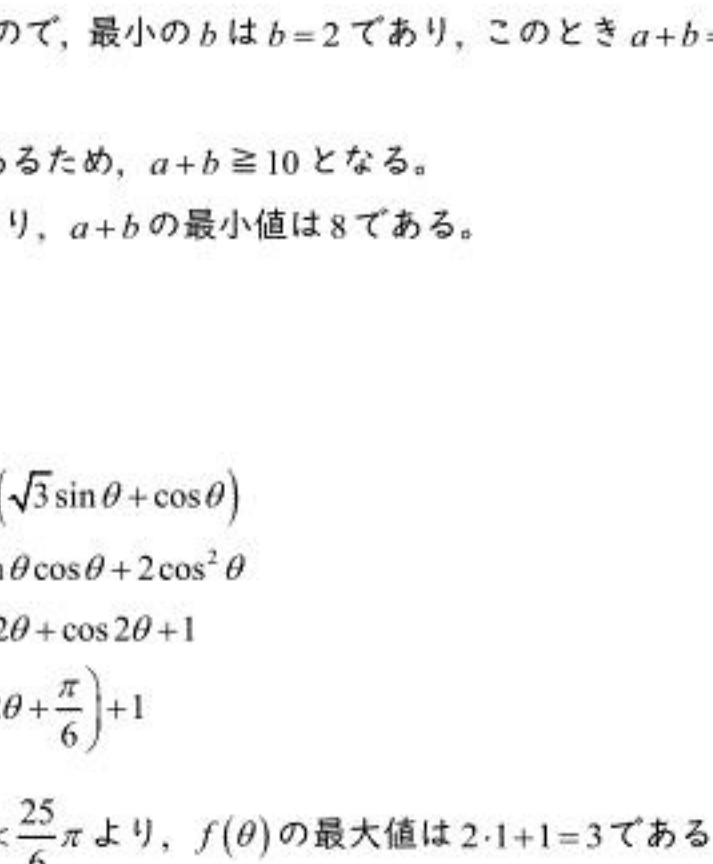
(2)

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) \\ \beta &= 1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ \gamma &= 1-\sqrt{3}i=2\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\} \end{aligned}$$

とおく。 z_1 を計算すると、ド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\alpha^{17}}{\beta^{19}\gamma^7} \\ &= \frac{2^{17}\left(\cos\frac{17}{6}\pi+i\sin\frac{17}{6}\pi\right)}{2^{27}\left(\cos\frac{19}{4}\pi+i\sin\frac{19}{4}\pi\right)\cdot 2^7\left\{\cos\left(-\frac{7}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{7}{3}\pi\right)\right\}} \\ &= 2^{-17-\frac{19}{2}+7}\left\{\cos\left(\frac{17}{6}-\frac{19}{4}+\frac{7}{3}\right)\pi+i\sin\left(\frac{17}{6}-\frac{19}{4}+\frac{7}{3}\right)\pi\right\} \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi+i\sin\frac{5}{12}\pi\right) \end{aligned}$$

となる。よって、 $\theta=\frac{5}{12}\pi$ であり、 $|z_1|=\sqrt{2}$ である。



$z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$ より、 $OA=OB$ である。また、

$$\begin{aligned} \angle AOB &= \arg z_2-\arg z_1 \\ &= \frac{3}{4}\pi-\frac{5}{12}\pi \\ &= \frac{1}{3}\pi \end{aligned}$$

であるので、 $\triangle OAB$ は正三角形である。よって、頂点Cは原点Oに一致するか、原点Oを線分ABについて対称移動した点である。求めたいのは後者であり、平行四辺形OBCAに着目すると、頂点Cの実部は、

$$\begin{aligned} -1+\sqrt{2}\cos\frac{5}{12}\pi &= -1+\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) \\ &= -1+\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= -1+\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}-3}{2} \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \arg\frac{a^7}{\beta^a\gamma^b} &= \frac{7}{6}\pi-\frac{a}{4}\pi+\frac{b}{3}\pi \\ &= \frac{14-3a+4b}{12}\pi \end{aligned}$$

であり、この偏角が $\frac{\pi}{12}+2n\pi$ (n は整数)となることから、
 $14-3a+4b=1+24n$
 $\Leftrightarrow 4(b-6n)=3a-13$

を満たすことが分かる。左辺は偶数なので、 a は奇数であることが必要である。

[1] $a=1, 5$ のとき

右辺は4の倍数ではないので適さない。

[2] $a=3$ のとき

$b=6n-1$ となるので、最小の b は $b=5$ であり、このとき $a+b=8$ となる。

[3] $a=7$ のとき

$b=6n+2$ となるので、最小の b は $b=2$ であり、このとき $a+b=9$ となる。

[4] $a\geq 9$ のとき

b は正の整数であるため、 $a+b\geq 10$ となる。

以上、[1], [2], [3], [4]より、 $a+b$ の最小値は8である。

(3)

$f(\theta)$ を変形すると、

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 2\cos\theta(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta) \\ &= 2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+2\cos^2\theta \\ &= \sqrt{3}\sin 2\theta+\cos 2\theta+1 \\ &= 2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)+1 \end{aligned}$$

となる。 $\frac{\pi}{6}\leq 2\theta<\frac{\pi}{6}+\frac{25}{6}\pi$ より、 $f(\theta)$ の最大値は $2\cdot 1+1=3$ である。また、点 (x, y) が円 $x^2+y^2=a^2$ 上を動くので、 $x=acos\theta, y=asin\theta$ とおける。このとき、

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \frac{2x(\sqrt{3}y+x)}{(x^2+y^2)^2+1} \\ &= \frac{a^2}{a^4+1}2\cos\theta(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta) \\ &= \frac{a^2}{a^4+1}f(\theta) \end{aligned}$$

となる。 $\frac{a^2}{a^4+1}>0$ より、 $g(x, y)$ が最大値をとるのは $f(\theta)$ が最大となるときであるので、

$g(x, y)$ の最大値は $\frac{3a^2}{a^4+1}$ となる。 $x=acos\theta, y=asin\theta$ より、 a, θ が $a>0, 0\leq\theta<2\pi$ の任意の値をとるとき、点 (x, y) は $(0, 0)$ 以外の xy 平面全体を動く。 $a^2>0, \frac{1}{a^2}>0$ であるので、相加相乗平均の関係より、

$$\frac{3a^2}{a^4+1}=\frac{3}{\frac{a^2}{a^2}+\frac{1}{a^2}}\leq\frac{3}{2\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{a^2}}}=\frac{3}{2}$$

となる。等号成立は $a^2=\frac{1}{a^2}$ かつ $a>0$ 、すなわち $a=1$ のときである。また、 $(x, y)=(0, 0)$ のとき、 $g(0, 0)=0$ である。よって、 $g(x, y)$ の最大値は $\frac{3}{2}$ となる。

(4)

$f(x), g(x)$ を x で微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{2x+1}+4f(x) \\ g'(x) &= -4e^{4x}f(x)+e^{4x}f'(x) \\ &= e^{4x}\{-4f(x)+f'(x)\} \\ &= e^{4x}\cdot 2e^{2x+1} \\ &= 2e^{-2x+1} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$g(x)=-e^{-2x+1}+C \quad (Cは積分定数)$$

$$g(0)=f(0)=e$$

であるので、

$$\begin{aligned} e &= -e+C \\ \Leftrightarrow C &= 2e \end{aligned}$$

を得る。よって、 $g(x)=-e^{-2x+1}+2e$ となる。また、

$$\begin{aligned} g(x) &= e^{4x}f(x) \\ \Leftrightarrow f(x) &= e^{4x}g(x) \end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{4x}(-e^{-2x+1}+2e) \\ &= 2e^{4x+1}-e^{2x+1} \end{aligned}$$

となる。 $f(x)$ と x 軸の交点の x 座標を求めると、 $e^{4x}>0$ より、

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow e^{4x}(-e^{-2x+1}+2e) &= 0 \\ \Leftrightarrow -e^{-2x+1}+2e &= 0 \\ \Leftrightarrow -2x+1 &= \log 2+1 \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{1}{2}\log 2 \end{aligned}$$

となるので、 $y=f(x)$ のグラフは下図のようになる。

よって、求める回転体の体積 V は、

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{-\frac{1}{2}\log 2}^0\{f(x)\}^2dx \\ &= \pi\int_{-\frac{1}{2}\log 2}^0(4e^{8x+2}-4e^{6x+2}+e^{4x+2})dx \\ &= \pi e^2\int_{-\frac{1}{2}\log 2}^0(4e^{8x}-4e^{6x}+e^{4x})dx \\ &= \pi e^2\left[\frac{1}{2}(e^{2x})^4-\frac{2}{3}(e^{2x})^3+\frac{1}{4}(e^{2x})^2\right]_{-\frac{1}{2}\log 2}^0 \\ &= \pi e^2\left[\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}-\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}+\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\right] \\ &= \frac{7}{96}\pi e^2 \end{aligned}$$

となる。

【2】

(1)

$n=4$ のとき、1 が奇数個用いられるのは1個か3個のみであり、これらは互いに背反である。

[1] 1 が1個用いられるとき

1 の位置の決め方が4通り、他の位は1以外の数でそれぞれ5通りであるので、

$$4 \cdot 5^3 = 500 \text{ (通り)}$$

となる。

[2] 1 が3個用いられるとき

1 の位置の決め方が ${}_4C_3$ 通り、他の位は1以外の数で5通りであるので、

$${}_4C_3 \cdot 5 = 20 \text{ (通り)}$$

となる。

以上、[1], [2]より、 $A_4 = 500 + 20 = 520$ となる。

(答) $A_4 = 520$

(2)

$n+1$ 桁の数の1の個数が奇数個になるためには、一の位を除く n 桁の部分に1が奇数個あるときは、一の位は1以外の数であればよく、一の位を除く n 桁の部分に1が偶数個あるときは、一の位は1であればよい。よって、

$$A_{n+1} = 5A_n + B_n$$

が成り立つ。

(答) $A_{n+1} = 5A_n + B_n$

(3)

$A_n + B_n$ は、1 から 6 の数字を用いて作れる n 桁の整数すべての数であるので、

$$A_n + B_n = 6^n$$

$$\Leftrightarrow B_n = 6^n - A_n$$

となる。これを(2)の漸化式に代入すると、

$$A_{n+1} = 5A_n + B_n$$

$$= 4A_n + 6^n$$

であり、両辺を 6^{n+1} で割ると、

$$\frac{A_{n+1}}{6^{n+1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{A_n}{6^n} + \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{A_{n+1}}{6^{n+1}} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \left(\frac{A_n}{6^n} - \frac{1}{2} \right)$$

となり、また、 $A_1 = 1$ であるため、数列 $\left\{ \frac{A_n}{6^n} - \frac{1}{2} \right\}$ は、初項 $\frac{A_1}{6^1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$ 、公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列である。よって、

$$\frac{A_n}{6^n} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow A_n = \frac{6^n}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\}$$

$$\Leftrightarrow A_n = \frac{6^n - 4^n}{2}$$

となる。これを $B_n = 6^n - A_n$ に代入して、

$$B_n = \frac{6^n + 4^n}{2}$$

を得る。

(答) $A_n = \frac{6^n - 4^n}{2}, B_n = \frac{6^n + 4^n}{2}$

(4)

与えられた漸化式の両辺を 6^{n+1} で割ると、

$$\frac{X_{n+1}}{6^{n+1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{X_n}{6^n} + \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{X_{n+1}}{6^{n+1}} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \left(\frac{X_n}{6^n} - \frac{1}{4} \right)$$

となるので、数列 $\left\{ \frac{X_n}{6^n} - \frac{1}{4} \right\}$ は、初項 $\frac{X_1}{6^1} - \frac{1}{4} = \frac{p}{6} - \frac{1}{4}$ 、公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列である。よって、

$$\frac{X_n}{6^n} - \frac{1}{4} = \left(\frac{p}{6} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow X_n = 6^n \left\{ \frac{1}{4} + \frac{2p-3}{12} \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right\}$$

$$\Leftrightarrow X_n = \frac{6^n + (2p-3) \cdot 2^n}{4}$$

となる。

(答) $X_n = \frac{6^n + (2p-3) \cdot 2^n}{4}$

(5)

1 と 6 がいずれも偶数個用いられるものの総数を D_n 、1 と 6 の用いられている個数の偶奇が一致しないものの総数を E_n とおく。このとき、 $C_n + D_n + E_n = 6^n$ が成り立つ。 $n+1$ 桁の数の1 と 6 がいずれも奇数個であるためには、一の位を除く n 桁の部分に1 と 6 がいずれも奇数個あるときは、一の位は1, 6 以外の数であればよく、一の位を除く n 桁の部分に1 と 6 がいずれも偶数個あるときは、一の位に関わらず適さず、一の位を除く n 桁の部分で1 と 6 の用いられている個数の偶奇が一致しないときは、一の位は1, 6 のうち偶数個用いられている方の数であればよい。よって、

$$C_{n+1} = 4C_n + E_n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。同様に考えて、

$$D_{n+1} = 4D_n + E_n \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

を得る。①-②より、

$$C_{n+1} - D_{n+1} = 4(C_n - D_n)$$

であるので、数列 $\{C_n - D_n\}$ は、初項 $C_1 - D_1 = 0 - 4 = -4$ 、公比4の等比数列である。よって、

$$C_n - D_n = -4^n \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

となる。また、①+②より、

$$C_{n+1} + D_{n+1} = 4(C_n + D_n) + 2E_n$$

$$\Leftrightarrow C_{n+1} + D_{n+1} = 4(C_n + D_n) + 2(6^n - C_n - D_n) \quad (\because C_n + D_n + E_n = 6^n)$$

$$\Leftrightarrow \frac{C_{n+1} + D_{n+1}}{2} = 2 \left(\frac{C_n + D_n}{2} \right) + 6^n$$

であり、 $X_n = \frac{C_n + D_n}{2}$ とおくと、(4)の漸化式に一致する。 $p = \frac{C_1 + D_1}{2} = \frac{0+4}{2} = 2$ より、

$$X_n = \frac{6^n + (4-3) \cdot 2^n}{4}$$

$$= \frac{6^n + 2^n}{4}$$

$$\Leftrightarrow C_n + D_n = \frac{6^n + 2^n}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

③+④より、

$$2C_n = \frac{6^n + 2^n - 2 \cdot 4^n}{2}$$

$$\Leftrightarrow C_n = \frac{6^n + 2^n - 2 \cdot 4^n}{4}$$

を得る。

(答) $C_n = \frac{6^n + 2^n - 2 \cdot 4^n}{4}$

【3】

(1)

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は、

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)$$

となる。 $y=0$ との交点の x 座標が $g(t)$ である。また、

$$\begin{aligned}f'(t) &= 5t^4 - 6t^2 + 9 \\ &= 5\left(t^2 - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{36}{5} \\ &> 0\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}0 &= f'(t)(g(t)-t) + f(t) \\ \Leftrightarrow g(t) &= t - \frac{f(t)}{f'(t)}\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}g(t) &= t - \frac{t^5 - 2t^3 + 9t}{5t^4 - 6t^2 + 9} \\ &= \frac{4t^3(t^2 - 1)}{5t^4 - 6t^2 + 9}\end{aligned}$$

である。

(答) $g(t) = \frac{4t^3(t^2 - 1)}{5t^4 - 6t^2 + 9}$

(2)

(1)を用いると、

$$\begin{aligned}h(t) &= \frac{g(t)}{t} \\ &= \frac{4t^2(t^2 - 1)}{5t^4 - 6t^2 + 9}\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}h'(t) &= \frac{(16t^3 - 8t)(5t^4 - 6t^2 + 9) - 4t^2(t^2 - 1)(20t^3 - 12t)}{(5t^4 - 6t^2 + 9)^2} \\ &= \frac{-8t(t^4 - 18t^2 + 9)}{(5t^4 - 6t^2 + 9)^2}\end{aligned}$$

となる。 $t > 0$ を考慮すると、

$$\begin{aligned}h'(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow t^4 - 18t^2 + 9 &= 0\end{aligned}$$

であり、これを t^2 について解くと、 $t^2 = 9 \pm 2\sqrt{18}$ となる。 $t > 0$ を再度用いて、

$$\begin{aligned}t &= \sqrt{9 \pm 2\sqrt{18}} \\ &= \sqrt{6} \pm \sqrt{3}\end{aligned}$$

を得る。

(答) $t = \sqrt{6} \pm \sqrt{3}$

(3)

$\alpha = \sqrt{6} - \sqrt{3}$, $\beta = \sqrt{6} + \sqrt{3}$ とおくと、 $h(t)$ の増減表は、

t	0	...	α	...	β	...
$h'(t)$		-	0	+	0	
$h(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

となる。ここで、 α, β は $t^4 - 18t^2 + 9 = 0$ の解であるため、

$$\begin{aligned}\alpha^4 &= 18\alpha^2 - 9 \\ \beta^4 &= 18\beta^2 - 9\end{aligned}$$

が成り立つことを利用すると、極小値は、

$$\begin{aligned}h(\alpha) &= \frac{4\alpha^4 - 4\alpha^2}{5\alpha^4 - 6\alpha^2 + 9} \\ &= \frac{4(18\alpha^2 - 9) - 4\alpha^2}{5(18\alpha^2 - 9) - 6\alpha^2 + 9} \\ &= \frac{17\alpha^2 - 9}{21\alpha^2 - 9} \\ &= \frac{17(9 - 6\sqrt{2}) - 9}{21(9 - 6\sqrt{2}) - 9} \\ &= \frac{24 - 17\sqrt{2}}{30 - 21\sqrt{2}} \\ &= \frac{1 - \sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

となる。同様にして、極大値は、

$$\begin{aligned}h(\beta) &= \frac{17\beta^2 - 9}{21\beta^2 - 9} \\ &= \frac{17(9 + 6\sqrt{2}) - 9}{21(9 + 6\sqrt{2}) - 9} \\ &= \frac{24 + 17\sqrt{2}}{30 + 21\sqrt{2}} \\ &= \frac{1 + \sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

である。さらに、

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +0} h(t) &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)}{5 - \frac{6}{t^2} + \frac{9}{t^4}} \\ &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

であることを併せると、 $h(t)$ の最大値は $h(\beta)$ 、最小値は $h(\alpha)$ となる。 $|h(\alpha)| < h(\beta)$ より、

すべての正の実数 t に対して、 $|h(t)| \leq p$ をみたす最小の p は、 $p = h(\beta) = \frac{1 + \sqrt{2}}{3}$ である。

(答) $p = \frac{1 + \sqrt{2}}{3}$

(4)

関数 $h(t)$ は、

$$\begin{aligned}h(-t) &= \frac{4(-t)^2 \{(-t)^2 - 1\}}{5(-t)^4 - 6(-t)^2 + 9} \\ &= \frac{4t^2(t^2 - 1)}{5t^4 - 6t^2 + 9} \\ &= h(t)\end{aligned}$$

より偶関数であるので、(3)より任意の実数 t に対して $|h(t)| \leq p = \frac{1 + \sqrt{2}}{3}$ が成り立つ。ここで、

$t \neq 0$ のとき、

$$\begin{aligned}|h(t)| &\leq p \\ \Leftrightarrow \left| \frac{g(t)}{t} \right| &\leq p \\ \Leftrightarrow |g(t)| &\leq p|t| \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

が成り立つ。また、 $t = 0$ のとき、 $g(0) = 0$ であるので $\textcircled{1}$ が成り立つ。したがって、任意の実

数 t について、 $|g(t)| \leq p|t|$ となる。ここで、 $t = a_n$ を代入すると、

$$\begin{aligned}|a_{n+1}| &= |g(a_n)| \\ &\leq p|a_n|\end{aligned}$$

が成り立つので、

$$0 \leq |a_n| \leq p|a_{n-1}| \leq \cdots \leq p^{n-1}|a_1|$$

を得る。さらに、 $|p| = \frac{1 + \sqrt{2}}{3} < \frac{1 + 2}{3} = 1$ より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} p^{n-1}|a_1| = 0$ となるので、はさみうちの原理よ

り、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ である。

(証明終)