

1.

【解答】

(1)	ア	イ	ウ
	8	8	7
(2)	エ		
	5		
(3)	オ	カ	キ
	1	5	10

【解説】

(1)

Iは辺CGのGを越える延長上にあり、CG:GI=2:1であるため、 $\overrightarrow{CI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CG}$ である。よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI} \\ &= \vec{a} + \overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CG} \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AE} \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c}\end{aligned}$$

となる。ここで、Lは直線AI上の点であるため、 k を実数として、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AL} &= k\overrightarrow{AI} \\ &= k\vec{a} + k\vec{b} + \frac{3}{2}k\vec{c}\end{aligned}$$

と表される。Lは平面EBD上の点でもあるため、

$$\begin{aligned}k + k + \frac{3}{2}k &= 1 \\ \therefore k &= \frac{2}{7}\end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\overrightarrow{AL} = \frac{2}{7}\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b} + \frac{3}{7}\vec{c}$$

である。

(2)

四面体ABDEについて、四面体ABDEは $\triangle ABD$ を底面とし辺AEを高さとする三角錐であるため、四面体ABDEの体積を V_1 、立方体ABCD-EFGHの体積を V_0 とおくと、

$$V_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} V_0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成立する。ここで、Mは直線EL上にあるため、 l を実数として、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AE} + l\overrightarrow{EL} \\ &= \vec{c} + l(\overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AE}) \\ &= \vec{c} + l\left(\frac{2}{7}\vec{a} + \frac{2}{7}\vec{b} + \frac{3}{7}\vec{c} - \vec{c}\right) \\ &= \frac{2}{7}l\vec{a} + \frac{2}{7}l\vec{b} + \left(1 - \frac{4}{7}l\right)\vec{c}\end{aligned}$$

と表される。また、Mは平面ABCD上の点でもあり、 $\vec{a}, \vec{b}$ は一次独立であるため、実数 s, t を用いて $\overrightarrow{AM} = s\vec{a} + t\vec{b}$ のように表される。さらに、 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は一次独立であるため、

$$\begin{cases} s = \frac{2}{7}l \\ t = \frac{2}{7}l \\ 0 = 1 - \frac{4}{7}l \end{cases} \quad \therefore (s, t, l) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$$

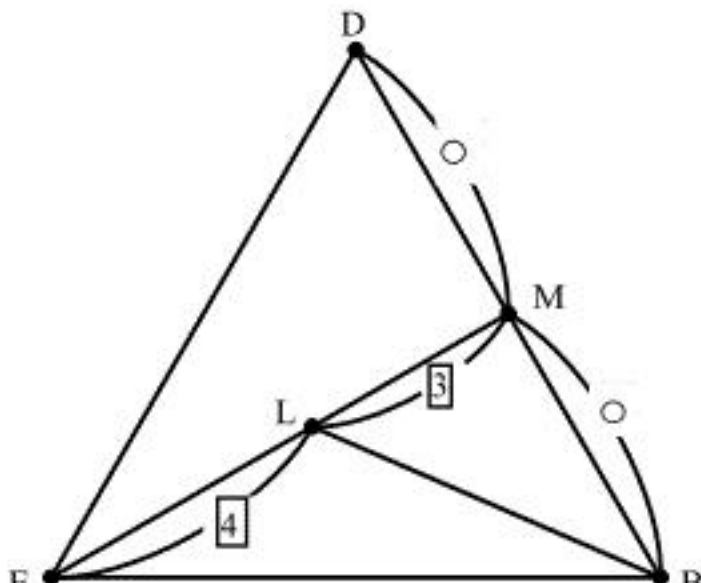
となる。よって、

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

であるため、Mは線分BDの中点であり、EL:EM=1:lより、

$$EL:LM=4:3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ。したがって、正三角形BDEおよび2点L, Mを図示すると下図のようになる。



上図より、

$$\begin{aligned}\triangle BLE &= \frac{MB}{DB} \cdot \frac{EL}{EM} \triangle BDE \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} \triangle BDE \\ &= \frac{2}{7} \triangle BDE\end{aligned}$$

が成り立つ。また、四面体ABDEと四面体ABLEの底面をそれぞれ $\triangle BDE, \triangle BLE$ とすると、四面体ABDEと四面体ABLEの高さが一致するため、四面体ABLEの体積を V_2 とおくと、

$$V_1:V_2 = \triangle BDE:\triangle BLE$$

である。よって、

$$\begin{aligned}V_2 &= \frac{\triangle BLE}{\triangle BDE} \cdot V_1 \\ &= \frac{2}{7} V_1\end{aligned}$$

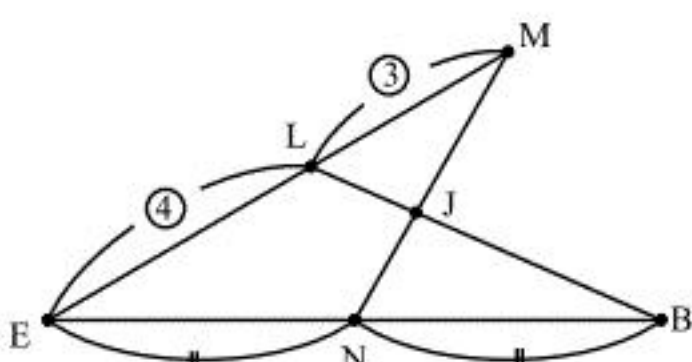
となり、①を代入すると、

$$\begin{aligned}V_2 &= \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} V_0 \\ &= \frac{1}{21} V_0\end{aligned}$$

である。以上より、四面体ABLEと立方体ABCD-EFGHの体積比は1:21である。

(3)

$\triangle BEL$ と線分MNを図示すると下図のようになる。



上図より、 $\triangle ENM$ と直線BLについて、メネラウスの定理より、

$$\frac{BE}{BN} \cdot \frac{JN}{JM} \cdot \frac{LM}{EL} = 1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

が成立する。ここで、点Nは線分BEの中点であるため、 $\frac{BE}{BN} = \frac{2}{1}$ となり、②より $\frac{LM}{EL} = \frac{3}{4}$ であるため、③に代入して、

$$\begin{aligned}\frac{2}{1} \cdot \frac{JN}{JM} \cdot \frac{3}{4} &= 1 \\ \therefore \frac{JN}{JM} &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

となる。よって、点Jは線分MNを3:2に内分するため、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AJ} &= \frac{2}{5}\overrightarrow{AM} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AN} \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c}) \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} + \frac{3}{10}\vec{c}\end{aligned}$$

である。

Ⅱ.

【解答】

(1)	ク
	10
(2)	ケ
	9
(3)	コ
	1
(4)	サ
	9

【解説】

(1)

すべてのカードの取り出し方は、 $7 \cdot 5 = 35$ (通り)で、これらは同様に確からしい。ここで、箱Bから取り出したカードによって場合分けをする。

[1] 箱Bから13のカードを取り出したとき

題意を満たす箱Aのカードは存在しない。

[2] 箱Bから14のカードを取り出したとき

題意を満たす箱Aのカードの番号は、2, 7である。

[3] 箱Bから24のカードを取り出したとき

題意を満たす箱Aのカードの番号は、2, 3, 4, 6, 8である。

[4] 箱Bから30のカードを取り出したとき

題意を満たす箱Aのカードの番号は、2, 3, 5, 6である。

[5] 箱Bから45のカードを取り出したとき

題意を満たす箱Aのカードの番号は、3, 5である。

以上, [1]～[5]より、題意を満たす組み合わせは13通りである。以上より、求める確率は $\frac{13}{35}$ となる。

(2)

箱Aから取り出した1枚のカードの番号を a 、箱Bから取り出した1枚のカードの番号を b とする。 a について、 $2b, 4b$ の正の約数は常に $8b$ の約数でもあるから、 ab の正の約数の個数は $a=2, 4$ のときよりも $a=8$ のときの方が多い。また、 $3b$ の正の約数は常に $6b$ の正の約数でもあるから、 ab の正の約数の個数は $a=3$ のときよりも $a=6$ のときの方が多い。よって、 $a=5, 6, 7, 8$ の4つの場合を考える。

[1] $a=5$ のとき

それぞれの b に対して ab を素因数分解し、 ab の正の約数の個数を求めると下表のとおりである。

b	ab の素因数分解	ab の約数の個数
13	$5 \cdot 13$	4
14	$2 \cdot 5 \cdot 7$	8
24	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	16
30	$2 \cdot 3 \cdot 5^2$	12
45	$3^2 \cdot 5^2$	9

上表より、 $a=5$ のとき、 ab の正の約数の個数の最大値は16である。

[2] $a=6$ のとき

それぞれの b に対して ab を素因数分解し、 ab の正の約数の個数を求めると下表のとおりである。

b	ab の素因数分解	ab の約数の個数
13	$2 \cdot 3 \cdot 13$	8
14	$2^2 \cdot 3 \cdot 7$	12
24	$2^4 \cdot 3^2$	15
30	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$	18
45	$2 \cdot 3^3 \cdot 5$	16

上表より、 $a=6$ のとき、 ab の正の約数の個数の最大値は18である。

[3] $a=7$ のとき

それぞれの b に対して ab を素因数分解し、 ab の正の約数の個数を求めると下表のとおりである。

b	ab の素因数分解	ab の約数の個数
13	$7 \cdot 13$	4
14	$2 \cdot 7^2$	6
24	$2^3 \cdot 3 \cdot 7$	16
30	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$	16
45	$3^2 \cdot 5 \cdot 7$	12

上表より、 $a=7$ のとき、 ab の正の約数の個数の最大値は16である。

[4] $a=8$ のとき

それぞれの b に対して ab を素因数分解し、 ab の正の約数の個数を求めると下表のとおりである。

b	ab の素因数分解	ab の約数の個数
13	$2^3 \cdot 13$	8
14	$2^4 \cdot 7$	10
24	$2^5 \cdot 3$	14
30	$2^4 \cdot 3 \cdot 5$	20
45	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$	24

上表より、 $a=8$ のとき、 ab の正の約数の個数の最大値は24である。

以上, [1]～[4]より、 ab の正の約数の個数は $(a, b) = (8, 45)$ のとき、最大値24をとる。

(3)

箱Aから同時に2枚、箱Bから1枚のカードを取り出す組み合わせは、 ${}_7C_2 \cdot {}_5C_1 = 105$ (通り)であり、これらはすべて同様に確からしい。また、取り出したカードに書かれた3つの番号が1以外の共通の正の約数をもつ、すなわち、2以上の共通の正の約数をもつとき、箱Aから同時に取り出した2枚のカードの番号が2以上の正の公約数をもつことが必要であるため、箱Aから同時に取り出される2枚のカードの番号の2以上の公約数は2か3か4である。

[1] 3つの番号の公約数が2または4のとき

箱Aからは2, 4, 6, 8のうち2枚、箱Bからは14, 24, 30のうち1枚取り出せばよいため、取り出し方は全部で ${}_4C_2 \cdot {}_3C_1 = 18$ (通り)である。

[2] 3つの番号の公約数が3のとき

箱Aからは3, 6の2枚、箱Bからは24, 30, 45のうち1枚取り出せばよいため、取り出し方は全部で ${}_2C_2 \cdot {}_3C_1 = 3$ (通り)である。

以上, [1], [2]より、題意を満たす組み合わせは $18 + 3 = 21$ (通り)であるため、求める確率は、

$$\frac{21}{105} = \frac{1}{5}$$

となる。

(4)

すべてのカードの取り出し方は、 $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$ (通り)であり、これらはすべて同様に確からしい。カードに書かれた番号の合計が15になる組み合わせは、

$$\{2, 5, 8\}, \{2, 6, 7\}, \{3, 4, 8\}, \{3, 5, 7\}, \{3, 6, 6\}, \{4, 4, 7\}, \{4, 5, 6\}, \{5, 5, 5\}$$

である。

[1] 異なる3種類の数の組み合わせを引いたとき

$\{2, 5, 8\}, \{2, 6, 7\}, \{3, 4, 8\}, \{3, 5, 7\}, \{4, 5, 6\}$ の5通りがあり、それぞれ $3! = 6$ (通り)の取り出し方があるため、題意を満たすカードの取り出し方は全部で $6 \cdot 5 = 30$ (通り)となる。

[2] 異なる2種類の数の組み合わせを引いたとき

$\{3, 6, 6\}, \{4, 4, 7\}$ の2通りがあり、それぞれ ${}_3C_2 = 3$ (通り)の取り出し方があるため、題意を満たすカードの取り出し方は全部で $3 \cdot 2 = 6$ (通り)となる。

[3] 1種類の数の組み合わせを引いたとき

$\{5, 5, 5\}$ の1通りであり、題意を満たすカードの取り出し方は全部で1通りとなる。

以上, [1], [2], [3]より、題意を満たす組み合わせは $30 + 6 + 1 = 37$ (通り)であるため、求める確率は $\frac{37}{343}$ である。

Ⅲ.

〔解答〕

シ	ス	セ	ソ
7	1	10	5

〔解説〕

数列 $\{a_n\}$ は等差数列であるため、公差を l とすると、任意の自然数 n に対し、 $a_n = a_1 + (n-1)l$ となる。よって、

$$\begin{aligned} a_p - a_q &= (p-q)l \\ \Leftrightarrow s-t &= (p-q)l \\ \therefore l &= \frac{s-t}{p-q} \quad (\because p \neq q) \end{aligned}$$

となるため、

$$\begin{aligned} a_1 &= a_p - (p-1)l \\ &= s - \frac{(p-1)(s-t)}{p-q} \\ &= \frac{(p-1)t - (q-1)s}{p-q} \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} a_{p+q} &= a_1 + (p+q-1)l \\ &= \frac{(p-1)t - (q-1)s}{p-q} + \frac{(p+q-1)(s-t)}{p-q} \\ &= \frac{ps - qt}{p-q} \end{aligned}$$

が成り立つ。次に、数列 $\{b_n\}$ は公差 d の等差数列であるため、任意の自然数 n に対し、

$$b_n = b_1 + (n-1)d$$

となる。ここで、数列 $\{b_n\}$ は等差数列であるため、任意の自然数 n に対し、

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}(b_1 + b_n)n \\ &= \left\{ b_1 + \frac{1}{2}(n-1)d \right\} n \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。よって、問題文より、

$$\begin{aligned} \begin{cases} S_p = q \\ S_q = 4p \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \left\{ b_1 + \frac{1}{2}(p-1)d \right\} p = q \\ \left\{ b_1 + \frac{1}{2}(q-1)d \right\} q = 4p \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2b_1 + (p-1)d = \frac{2q}{p} \quad (\because p \neq 0) & \dots \textcircled{2} \\ 2b_1 + (q-1)d = \frac{8p}{q} \quad (\because q \neq 0) & \dots \textcircled{3} \end{cases} \end{aligned}$$

となるため、②、③より、

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{p-q} \left[\{2b_1 + (p-1)d\} - \{2b_1 + (q-1)d\} \right] \quad (\because p \neq q) \\ &= \frac{1}{p-q} \cdot \left(\frac{2q}{p} - \frac{8p}{q} \right) \\ &= \frac{1}{p-q} \cdot \frac{2q^2 - 8p^2}{pq} \\ &= \frac{2(-4p^2 + q^2)}{pq(p-q)} \end{aligned}$$

となる。これを②に代入すると、

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{q}{p} - \frac{1}{2}(p-1)d \\ &= \frac{q}{p} - \frac{1}{2}(p-1) \cdot \frac{2(-4p^2 + q^2)}{pq(p-q)} \\ &= \frac{q^2(p-q) - (p-1)(-4p^2 + q^2)}{pq(p-q)} \\ &= \frac{(pq^2 - q^3) - (-4p^3 + pq^2 + 4p^2 - q^2)}{pq(p-q)} \\ &= \frac{4p^3 - 4p^2 + q^2 - q^3}{pq(p-q)} \end{aligned}$$

である。したがって、これらを①に代入して、

$$\begin{aligned} S_{p+q} &= \left\{ b_1 + \frac{1}{2}(p+q-1)d \right\} (p+q) \\ &= \left\{ \frac{4p^3 - 4p^2 + q^2 - q^3}{pq(p-q)} + \frac{1}{2}(p+q-1) \cdot \frac{2(-4p^2 + q^2)}{pq(p-q)} \right\} (p+q) \\ &= \frac{p+q}{pq(p-q)} \left\{ (4p^3 - 4p^2 + q^2 - q^3) + (p+q-1)(-4p^2 + q^2) \right\} \\ &= \frac{p+q}{pq(p-q)} \left\{ (4p^3 - 4p^2 + q^2 - q^3) + (-4p^3 - 4p^2q + 4p^2 + pq^2 + q^3 - q^2) \right\} \\ &= \frac{p+q}{pq(p-q)} \cdot pq(-4p+q) \\ &= \frac{(p+q)(-4p+q)}{p-q} \end{aligned}$$

である。

IV.

【解答】

(1)	タ
	9
(2)	チ
	4
(3)	ツ
	6
(4)	テ
	2
(5)	ト
	4

【解説】

(1)

$\sin \theta = X$ とおくと、 $f(\theta)$ は X を用いて、

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 4 \cos^2 \theta + 3 \cos 2\theta + 5a \sin \theta - 3a - 5 \\ &= 4(1 - \sin^2 \theta) + 3(1 - 2 \sin^2 \theta) + 5a \sin \theta - 3a - 5 \\ &= -10 \sin^2 \theta + 5a \sin \theta - 3a + 2 \\ &= -10X^2 + 5aX - 3a + 2 \end{aligned}$$

と表される。

(2)

$g(X) = -10X^2 + 5aX - 3a + 2$ とおく。 $\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき、 $X = \frac{1}{2}$ であるため、(1)より、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= g\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= -10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5a \cdot \frac{1}{2} - 3a + 2 \\ &= -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

(3)

$a = 4$ のとき、

$$\begin{aligned} g(X) &= -10X^2 + 5 \cdot 4 \cdot X - 3 \cdot 4 + 2 \\ &= -10X^2 + 20X - 10 \\ &= -10(X-1)^2 \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 0 \\ \Leftrightarrow -10(X-1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow X &= 1 \\ \therefore \sin \theta &= 1 \end{aligned}$$

である。ここで、 $\sin \theta = 1$ となるような実数 θ の値は、 k を整数として

$$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

であり、これが方程式 $f(\theta) = 0$ の実数解である。

(4)

$0 \leq \theta < 2\pi$ のとき、 $-1 < X < 1$ では、1 個の X の値に対応する θ の値は 2 個存在し、 $X = \pm 1$ では 1 個の X の値に対応する θ の値は 1 個存在する。よって、方程式 $f(\theta) = 0$ の異なる実数解の個数がちょうど 3 個になるとき、方程式 $g(X) = 0$ が $X = 1$ か $X = -1$ を解にもち、さらに $-1 < X < 1$ を満たす実数解を 1 個もつことが必要となる。ここで、

$$\begin{aligned} g(1) &= -10 \cdot 1^2 + 5a \cdot 1 - 3a + 2 \\ &= 2(a-4) \end{aligned}$$

より、 $X = 1$ を解にもつとき、

$$\begin{aligned} g(1) &= 0 \\ \therefore a &= 4 \end{aligned}$$

となる。このとき、(3)より $X = 1$ は重解となるため不適である。また、

$$\begin{aligned} g(-1) &= -10 \cdot (-1)^2 + 5a \cdot (-1) - 3a + 2 \\ &= -8(a+1) \end{aligned}$$

より、 $X = -1$ を解にもつとき、

$$\begin{aligned} g(-1) &= 0 \\ \therefore a &= -1 \end{aligned}$$

である。このとき、

$$\begin{aligned} g(X) &= -10X^2 + 5 \cdot (-1) \cdot X - 3 \cdot (-1) + 2 \\ &= -10X^2 - 5X + 5 \\ &= -10(X+1)\left(X - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

であるため、

$$\begin{aligned} g(X) &= 0 \\ \Leftrightarrow -10(X+1)\left(X - \frac{1}{2}\right) &= 0 \\ \therefore X &= -1, \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となり、題意を満たす。よって、求める値は $a = -1$ である。

(5)

$g(X)$ を X について平方完成すると、

$$\begin{aligned} g(X) &= -10X^2 + 5aX - 3a + 2 \\ &= -10\left(X - \frac{1}{4}a\right)^2 + \frac{5}{8}a^2 - 3a + 2 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $f(\theta) = 0$ が実数解をもたないための必要十分条件は、方程式 $g(X) = 0$ が

$-1 \leq X \leq 1$ に実数解をもたないことである。また、 $g(X) = 5a\left(X - \frac{3}{5}\right) - 10X^2 + 2$ であるため、

$$\begin{aligned} g\left(\frac{3}{5}\right) &= -10 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 2 \\ &= -\frac{8}{5} \end{aligned}$$

となる。よって、 $y = g(X)$ は a の値によらず $\left(\frac{3}{5}, -\frac{8}{5}\right)$ を通るため、求める条件は $-1 \leq X \leq 1$

において $g(X)$ の最大値が負であることである。ここで、 $y = g(X)$ の軸は $X = \frac{1}{4}a$ であり、軸の位置で場合分けを行う。

[1] $\frac{1}{4}a < -1$ 、すなわち、 $a < -4$ のとき

$$\begin{aligned} -1 \leq X \leq 1 \text{ において } g(X) \text{ は } X = -1 \text{ で最大値 } g(-1) &= -8(a+1) \text{ をとる。よって、} \\ -8(a+1) &< 0 \\ \therefore a &> -1 \end{aligned}$$

となるが、 $a < -4$ を満たさないため、不適である。

[2] $-1 \leq \frac{1}{4}a \leq 1$ 、すなわち、 $-4 \leq a \leq 4$ のとき

$$-1 \leq X \leq 1 \text{ において } g(X) \text{ は } X = \frac{1}{4}a \text{ で最大値}$$

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{4}a\right) &= \frac{5}{8}a^2 - 3a + 2 \\ &= \frac{5}{8}\left(a - \frac{4}{5}\right)(a-4) \end{aligned}$$

をとる。よって、

$$\begin{aligned} \frac{5}{8}\left(a - \frac{4}{5}\right)(a-4) &< 0 \\ \therefore \frac{4}{5} &< a < 4 \end{aligned}$$

となるため、 $-4 \leq a \leq 4$ と合わせて、求める条件は $\frac{4}{5} < a < 4$ である。

[3] $1 < \frac{1}{4}a$ 、すなわち、 $a > 4$ のとき

$$\begin{aligned} -1 \leq X \leq 1 \text{ において } g(X) \text{ は } X = 1 \text{ で最大値 } g(1) &= 2(a-4) \text{ をとる。よって、} \\ 2(a-4) &< 0 \\ \therefore a &< 4 \end{aligned}$$

となるが、 $a > 4$ を満たさないため、不適である。

以上、[1], [2], [3]より、求める必要十分条件は、 $\frac{4}{5} < a < 4$ である。

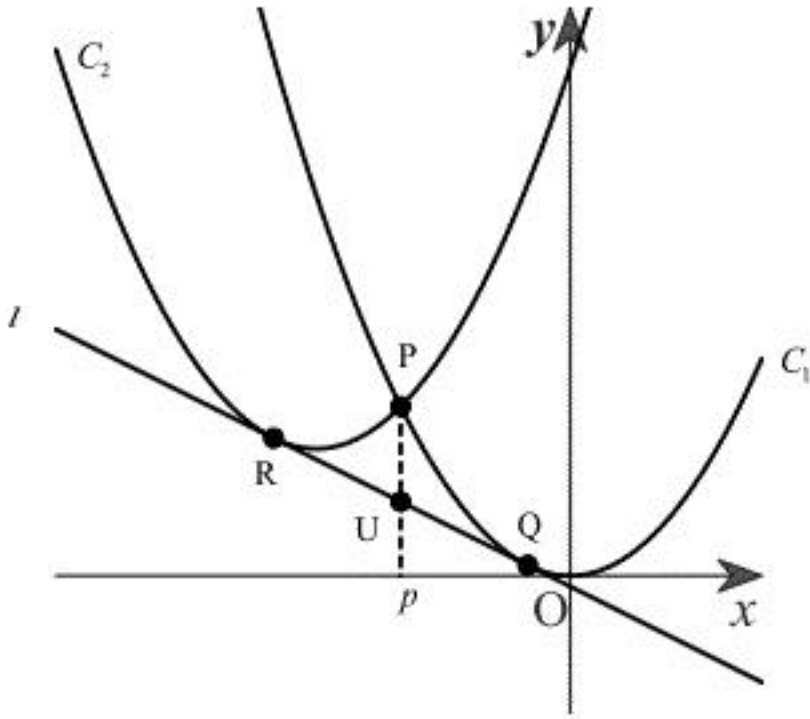
V.

【解答】

ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ
2	3	4	8	5

【解説】

放物線 C_1 , C_2 と直線 l を図示すると下図のようになる。ただし、点 P から x 軸に対して垂直に下ろした直線 $x = p$ と直線 l の交点を U とおく。



点 $P(p, p^2)$ は放物線 $C_2: y = x^2 + ax + a$ 上にもあるため、

$$\begin{aligned} p^2 &= p^2 + ap + a \\ \Leftrightarrow a(p+1) &= 0 \\ \therefore p &= -1 \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

となる。また、放物線 C_2 について、

$$\begin{aligned} y &= x^2 + ax + a \\ \Leftrightarrow y &= \left(x + \frac{1}{2}a\right)^2 - \frac{1}{4}a^2 + a \end{aligned}$$

であるため、放物線 C_2 の頂点が P となるとき、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}a &= p \\ \Leftrightarrow a &= -2p \\ \therefore a &= 2 \quad (\because p = -1, a > 0) \end{aligned}$$

となる。次に、放物線 C_1 について、

$$y' = 2x$$

であるため、 t を実数とすると、点 (t, t^2) における放物線 C_1 の接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= 2t(x-t) + t^2 \\ \Leftrightarrow y &= 2tx - t^2 \end{aligned}$$

と表される。この接線が放物線 C_2 と接するとき、接線と放物線 C_2 を連立した x についての 2 次方程式

$$\begin{aligned} 2tx - t^2 &= x^2 + ax + a \\ \Leftrightarrow x^2 + (a-2t)x + a+t^2 &= 0 \end{aligned}$$

は重解をもつ。上式の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} D &= (a-2t)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a+t^2) \\ &= a^2 - 4a - 4at \\ &= a(a-4-4t) \end{aligned}$$

となるため、

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow a(a-4-4t) &= 0 \\ \therefore t &= \frac{a-4}{4} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

である。よって、直線 l の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2 \cdot \left(\frac{a-4}{4}\right)x - \left(\frac{a-4}{4}\right)^2 \\ \Leftrightarrow y &= \left(\frac{a}{2} - 2\right)x - \frac{1}{16}(a-4)^2 \end{aligned}$$

となる。ここで、放物線 C_2 について、

$$y' = 2x + a$$

であるため、直線 l と放物線 C_2 の接点 R の x 座標を s とおくと、 $x = s$ における放物線 C_2 の接線の傾きは $2s + a$ と表される。よって、

$$\begin{aligned} 2s + a &= \frac{a}{2} - 2 \\ \therefore s &= -\frac{a+4}{4} \end{aligned}$$

となる。図より、放物線 C_2 は直線 l の上側にあるため、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{a+4}{4}}^0 \left[(x^2 + ax + a) - \left\{ \left(\frac{a}{2} - 2\right)x - \frac{1}{16}(a-4)^2 \right\} \right] dx \\ &= \int_{-\frac{a+4}{4}}^0 \left\{ x^2 + \frac{a+4}{2}x + \frac{1}{16}(a+4)^2 \right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{a+4}{4}x^2 + \frac{1}{16}(a+4)^2 x \right]_{-\frac{a+4}{4}}^0 \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{a+4}{4}\right)^3 - \frac{a+4}{4} \cdot \left(-\frac{a+4}{4}\right)^2 - \left(\frac{a+4}{4}\right)^2 \cdot \left(-\frac{a+4}{4}\right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a+4}{4}\right)^3 \\ &= \frac{1}{192}(a^3 + 12a^2 + 48a + 64) \end{aligned}$$

と表される。次に、三角形 PQR について、 $P(-1, 1)$ であり、 Q の x 座標は $t = \frac{a-4}{4}$ 、 R の x 座標は $s = -\frac{a+4}{4}$ である。また、直線 l の方程式に $x = -1$ を代入すると、

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{a}{2} - 2\right) \cdot (-1) - \frac{1}{16}(a-4)^2 \\ &= -\frac{1}{16}a^2 + 1 \end{aligned}$$

となるため、 $U\left(-1, -\frac{1}{16}a^2 + 1\right)$ である。よって、図より、 $PU = \frac{1}{16}a^2$ となり、直線 PU と Q, R

の距離はともに $\frac{1}{4}a$ となる。したがって、三角形 PQR の面積 T は、

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16}a^2 \cdot \frac{1}{4}a\right) \cdot 2 \\ &= \frac{1}{64}a^3 \end{aligned}$$

となるため、

$$\begin{aligned} S - T &= \frac{1}{192}(a^3 + 12a^2 + 48a + 64) - \frac{1}{64}a^3 \\ &= \frac{1}{96}(-a^3 + 6a^2 + 24a + 32) \end{aligned}$$

である。ここで、 $f(a) = \frac{1}{96}(-a^3 + 6a^2 + 24a + 32)$ とおくと、

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{1}{96}(-3a^2 + 12a + 24) \\ &= -\frac{1}{32}(a^2 - 4a - 8) \end{aligned}$$

であるため、 $a > 0$ において、

$$\begin{aligned} f'(a) &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{32}(a^2 - 4a - 8) &= 0 \\ \therefore a &= 2 + 2\sqrt{3} \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

となる。よって、 $a > 0$ における関数 $f(a)$ の増減は下表の通りである。

a	(0)	...	$2+2\sqrt{3}$	...
$f'(a)$		+	0	-
$f(a)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$

上表より、 $a > 0$ において関数 $f(a)$ は $a = 2 + 2\sqrt{3}$ のときに最大値をとる。よって、 $S - T$ は

$a = 2 + 2\sqrt{3}$ のときに最大値をとる。